РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В Е С Т Н И К

РОССИЙСКО-АРМЯНСКОГО

УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

№ 2

Издательство РАУ

Ереван 2016

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Լ Ր Ա Բ Ե Ր

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ

ՍԵՐԻԱ

ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ԵՎ ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

№ 2

ՀՌՀ Հրատարակչություն

Երևան 2016

Печатается по решению Ученого совета РАУ

Вестник РАУ, № 2. – Ер.: Изд-во РАУ, 2015. – 100 с.

Журнал входит в перечень периодических изданий, зарегистрированных ВАК РА

Российско-Армянский университет, 2016 г.

ISBN 1829-0450

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.518.23

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ДВУМЯ ВЕРШИНАМИ АНИЗОТРОПНОСТИ[1]

М.К. Аракелян, Г.А. Петросян

Российско-Армянский университет

michael.arakel@gmail.com
heghin.petrosyan@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В данной научной статье получено специальное интегральное представление для функций из мультианизотропного пространства Соболева, когда многогранник Ньютона имеет две вершины анизотропности и, применяя данное представление, доказываются теоремы вложения для функций, принадлежащих вышеуказанным классам.

Ключевые слова: мультианизотропное пространство, теоремы вложения, интегральное представление, мультианизотропный многочлен.

Введение

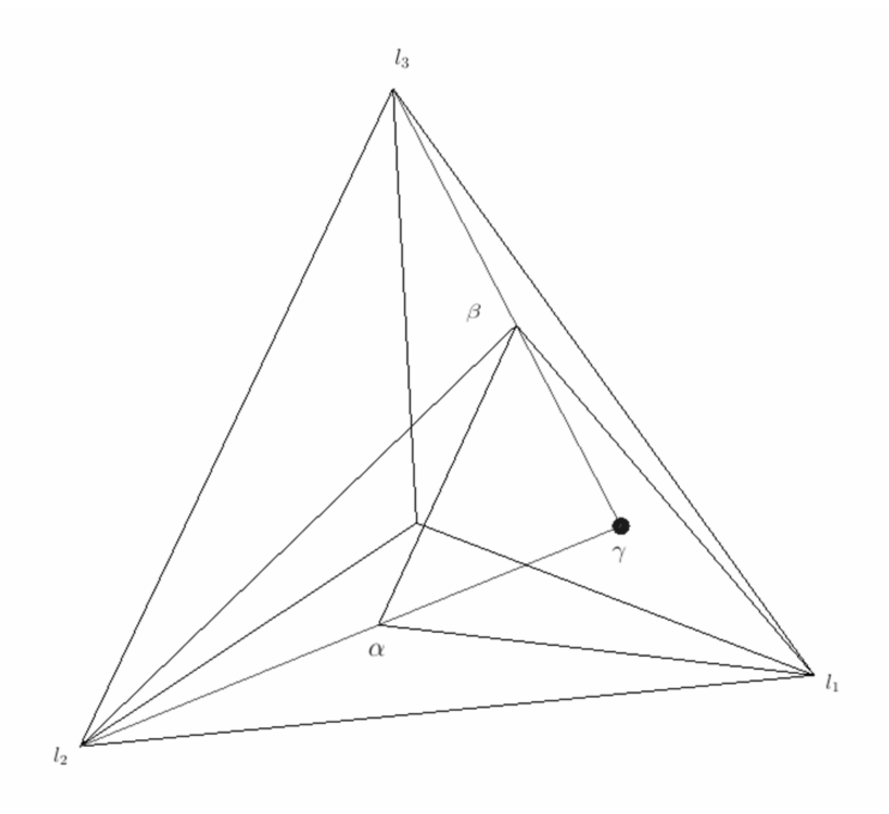
Данная статья является продолжением работ [1–2], где доказаны теоремы вложения для мультианизотропных пространств в том

[1] Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ.

случае, когда характеристический многогранник имеет одну вершину анизотропности. Ниже изучается трехмерный случай, когда многогранник имеет две вершины анизотропности. Здесь трудность заключается в том, что при получении соответствующих оценок нужно выбрать «доминирующую» грань, что и делается в работе. Отметим, что история теорем вложения начинается с работ С.Л. Соболева (см. [3–4]), а потом эти результаты для анизотропных пространств были продолжены разными математиками. Отметим из них работы [5–10], а также книгу [11], где можно найти историю вопроса и разные результаты.

1. Мультианизотропные экспоненты и их свойства

Пусть R^3 – трехмерное пространство, Z_+^3 – множество мультииндексов. Для $\xi,\eta \in R^3$, $\alpha \in Z_+^3$, $t>0$ обозначим через $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}$, $t^\eta = (t^{\eta_1}, t^{\eta_2}, t^{\eta_3})$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3}$ – обобщенное производное С.Л. Соболева. Пусть $\Re$ такой вполне правильный многогранник с вершинами $\alpha^1 = (l_1, 0, 0)$, $\alpha^2 = (0, l_2, 0)$, $\alpha^3 = (0, 0, l_3)$, $\alpha^4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\alpha^5 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, причем α^4 и α^5 имеют только положительные координаты, что на каждой двумерной некоординатной грани $\Re_i^2, (i = 1,...,5)$ лежат лишь 3 точки из этих вершин, при этом этими двумерными гранями являются следующие грани: $\Re_1^2 = (\alpha^2, \alpha^3, \alpha^5)$, $\Re_2^2 = (\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5)$, $\Re_3^2 = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^4)$, $\Re_4^2 = (\alpha^1, \alpha^4, \alpha^5)$, $\Re_5^2 = (\alpha^2, \alpha^4, \alpha^5)$. Пусть $\mu^i, (i = 1,...,5)$ такая внешняя нормаль двумерной некоординатной грани $\Re_i^2, (i = 1,...,5)$, что уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$, $(i = 1,...,5)$.



Для произвольного параметра $\nu > 0$ и натурального числа k обозначим через

$$P(\nu,\xi) = \sum_{i=1}^{5} \left(\nu \xi^{\alpha^i}\right)^{2k}. \qquad (1.1)$$

$$G_0(\nu,\xi) = e^{-P(\nu,\xi)}. \qquad (1.2)$$

$$G_{1,j}(\nu,\xi) = 2k\left(\nu \xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, \quad (j = 1,...,5). \qquad (1.3)$$

А также обозначим через $\hat{G}_0(t,\nu)$, $\hat{G}_{1,j}(t,\nu)$, $(j = 1,...,5)$ преобразование Фурье данных функций. Очевидно, что $G_0, G_{1,j}, \hat{G}_0, \hat{G}_{1,j} \in S$, где $S = S(R^3)$ – множество быстро убывающих на бесконечности бесконечно дифференцируемых функций.

Для любого мультииндекса $m=(m_1,m_2,m_3)$ обозначим через

$$I_m(\nu)=\int\limits_{R^3}\xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\xi_3^{m_3}e^{-P(\nu,\xi)}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \qquad (1.4)$$

и изучим поведение функции $I_m(\nu)$ в зависимости от $\nu: 0<\nu<1$.

Лемма 1.1.

Пусть $m=(m_1,m_2,m_3),\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ *мультииндексы с положительными компонентами, для которых*

$$\max_{j=1,3}\frac{\alpha_j}{m_j+1}<\frac{\alpha_2}{m_2+1},\quad \max_{j=1,2}\frac{\beta_j}{m_j+1}<\frac{\beta_3}{m_3+1}. \qquad (1.5)$$

Тогда одна из систем

$$\begin{cases} x+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}y+\dfrac{\beta_1}{\beta_3}z=m_1+1\\ y+\dfrac{\beta_2}{\beta_3}z=m_2+1\\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}y+z=m_3+1\end{cases} \qquad (1.6)$$

$$\begin{cases} x+\dfrac{\beta_1}{\beta_3}z=m_1+1\\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x+y+\dfrac{\beta_2}{\beta_3}z=m_2+1\\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}x+z=m_3+1\end{cases} \qquad (1.7)$$

имеет решение (x,y,z) *с неотрицательными компонентами.*

Доказательство: Пусть (x^0,y^0,z^0) решение системы (1.6), а (x^1,y^1,z^1) решение системы (1.7). Нетрудно проверить, что тогда в силу условия (1.5) $y^0>0, z^0>0, x^1>0, z^1>0$. Так как в силу (1.5) $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}\cdot\dfrac{\beta_2}{\beta_3}<1$ и по правилу Крамера

$$x^0=\frac{\begin{vmatrix} m_1+1 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \frac{\beta_1}{\beta_3} \\ m_2+1 & 1 & \frac{\beta_2}{\beta_3} \\ m_3+1 & \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & 1 \end{vmatrix}}{1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_3}}=\frac{\begin{vmatrix} m_1+1 & m_2+1 & m_3+1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}=:\frac{\Delta}{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2},$$

то при $\Delta\geq 0$ $x^0\geq 0$. Следовательно, утверждение леммы верно. Пусть поэтому $\Delta<0$. Через $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ обозначив соответствующие дополнения разложения Лапласса Δ относительно первой строки, т.е. $\Delta_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2$ (>0), $\Delta_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3$ и $\Delta_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ получим, что

$$\Delta=(m_1+1)\Delta_1+(m_2+1)\Delta_2+(m_3+1)\Delta_3. \qquad (1.8)$$

Так как

$$\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2+\alpha_3\Delta_3=\beta_1\Delta_1+\beta_2\Delta_2+\beta_3\Delta_3=0 \qquad (1.9)$$

и $\Delta_1>0$, то хотя бы один из Δ_2,Δ_3 отрицательный.

Рассмотрим следующие возможные случаи: 1) $\Delta_3\geq 0,\Delta_2<0$, 2) $\Delta_3<0,\Delta_2\geq 0$, 3) $\Delta_3<0,\Delta_2<0$. Так как в силу условий (1.5) $m_1+1\geq\frac{m_2+1}{\alpha_2}\alpha_1$ и $m_3+1\geq\frac{m_2+1}{\alpha_2}\alpha_3$, то в случае 1) из (1.8) и (1.9) имеем

$$\Delta>\frac{m_2+1}{\alpha_2}(\Delta_1\alpha_1+\Delta_2\alpha_2+\Delta_3\alpha_3)=0,$$

что противоречит условию $\Delta<0$.

Так как в силу условий (1.5) $m_1+1\geq\frac{m_3+1}{\beta_3}\beta_1$ и $m_2+1\geq\frac{m_3+1}{\beta_3}\beta_2$, то в случае 2) из (1.8) с применением (1.9) имеем

$$\Delta>\frac{m_3+1}{\alpha_3}(\Delta_1\beta_1+\Delta_2\beta_2+\Delta_3\beta_3)=0,$$

что опять противоречит условию $\Delta<0$.

В случае 3) рассмотрим следующие возможные варианты:

3.1) $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\leq\frac{m_1+1}{m_3+1}$ или $\frac{\beta_1}{\beta_2}\leq\frac{m_1+1}{m_2+1}$,

3.2) $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} \le \dfrac{m_2+1}{m_3+1}$ или $\dfrac{\beta_1}{\beta_2} \le \dfrac{m_1+1}{m_2+1}$.

Пусть в варианте 3.1) $\alpha_1/\alpha_3 \le (m_1+1)/(m_3+1)$. При $\beta_1/\beta_2 \le (m_1+1)/(m_2+1)$ доказательство проверяется аналогично.

Тогда из (1.8) с применением (1.9) в силу (1.5) и отсюда имеем

$$\Delta \ge (m_1+1)\Delta_1 + \frac{(m_1+1)\alpha_2}{\alpha_1}\Delta_2 + \frac{(m_1+1)\alpha_3}{\alpha_1}\Delta_3 = \frac{m_1+1}{\alpha_1}(\alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2 + \alpha_3\Delta_3) = 0,$$

что опять противоречит условию $\Delta < 0$.

Рассмотрим вариант 3.1). Так как в этом случае $\Delta < 0, \Delta_2 < 0$ и по правилу Крамера для системы (1.7)

$$y^1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_1+1 & \dfrac{\beta_1}{\beta_3} \\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} & m_2+1 & \dfrac{\beta_2}{\beta_3} \\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} & m_3+1 & 1 \end{vmatrix}}{1 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\cdot\dfrac{\beta_1}{\beta_3}} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ m_1+1 & m_2+1 & m_3+1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2} = \frac{\Delta}{\Delta_2} > 0,$$

то решение (x^1, y^1, z^1) системы (1.7) неотрицательно.

Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Для любого мультииндекса* $m = (m_1, m_2, m_3)$ *существуют постоянные* C_0, C_1, C_2 *такие, что для любого* $\nu : 0 < \nu < 1$ *имеет место неравенство*

$$\left|I_m(\nu)\right| \le (C_2\left|\ln\nu\right|^2 + C_1\left|\ln\nu\right| + C_0)\nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,5}\left(\left|\mu^i\right| + (m,\mu^i)\right)}. \qquad (1.10)$$

Доказательство: Рассмотрим отношения $\dfrac{\alpha_i}{m_i+1}$, $(i = 1,2,3)$.

Обозначим через i_0 тот индекс, для которого $\max\limits_{i=1,2,3}\dfrac{\alpha_i}{m_i+1} = \dfrac{\alpha_{i_0}}{m_{i_0}+1}$.

Сначала рассмотрим случай, когда максимум достигается только для

одного номера i_0, т.е. $\frac{\alpha_i}{m_i+1} < \frac{\alpha_{i_0}}{m_{i_0}+1}$, $i \neq i_0$ $(i=1,2,3)$. Пусть $i_0 = 3$. Рассмотрим грань $\Re_3^2$. Пусть данная грань имеет внешнюю нормаль μ^3. Тогда в (1.10) сначала после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^3}\eta$ и затем $\eta_1 = \eta_1, \eta_2 = \eta_2, t = \eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}\eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}\eta_3$ имеем

$$|I_m(\nu)| \leq C\nu^{-(|\mu^3|+(m,\mu^3))}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \eta_1^{m_1}\eta_2^{m_2}\eta_3^{m_3}e^{-\eta_1^{2kl_1}-\eta_2^{2kl_2}-\eta^{2k\alpha}}d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^3|+(m,\mu^3))}\int_0^\infty e^{-t^{2k\alpha_3}}t^{m_3}dt\int_0^\infty \eta_1^{m_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}m_3-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}e^{-\eta_1^{2kl_1}}d\eta_1\int_0^\infty \eta_2^{m_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}m_3-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}e^{-\eta_2^{2kl_2}}d\eta_2$$

$$\leq C\nu^{-(|\mu^3|+(m,\mu^3))} \leq C\nu^{-\max\limits_{i=1,\ldots,5}(|\mu^i|+(m,\mu^i))}.$$

Последнее соотношение следует из сходимости трех интегралов и из неравенств $m_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3}m_3 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} > -1$, $m_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}m_3 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} > -1$. В случае $\frac{\alpha_1}{m_1+1} < \frac{\alpha_2}{m_2+1} = \frac{\alpha_3}{m_3+1}$ и $\frac{\alpha_1}{m_1+1} = \frac{\alpha_2}{m_2+1} = \frac{\alpha_3}{m_3+1}$ утверждение леммы получается аналогичным, как и в работе [2].

Если $i_0 \neq 3$, то подобные отношения рассматриваются для второй вершины анизотропности $\alpha^5 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Обозначим через j_0 тот индекс, для которого $\max\limits_{j=1,2,3}\frac{\beta_j}{m_j+1} = \frac{\beta_{j_0}}{m_{j_0}+1}$.

Теперь, если $j_0 = 2$, рассмотрим грань $\Re_2^2$ с внешней нормалью μ^2; при $j_0 = 1$ рассмотрим грань $\Re_1^2$ с внешней нормалью μ^1. Тогда заменой переменных $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$ и $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$, соответственно, в (1.10) дает тот же результат с небольшим изменением в интеграле (например, l_3 вместо l_2 или α вместо β и т.д.).

Осталось рассмотреть следующие случаи:

а) $\max\limits_{i=1,2,3}\dfrac{\alpha_i}{m_i+1}=\dfrac{\alpha_2}{m_2+1}$ и $\max\limits_{j=1,2,3}\dfrac{\beta_j}{m_j+1}=\dfrac{\beta_3}{m_3+1}$;

б) $\max\limits_{i=1,2,3}\dfrac{\alpha_i}{m_i+1}=\dfrac{\alpha_1}{m_1+1}$ и $\max\limits_{j=1,2,3}\dfrac{\beta_j}{m_j+1}=\dfrac{\beta_3}{m_3+1}$.

Рассмотрим случай а) случай б) рассматривается аналогично.

Пусть в случае а)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}<\frac{m_1+1}{m_2+1},\ \frac{\alpha_3}{\alpha_2}<\frac{m_3+1}{m_2+1},$$
$$\frac{\beta_1}{\beta_3}<\frac{m_1+1}{m_3+1},\ \frac{\beta_2}{\beta_3}<\frac{m_2+1}{m_3+1}. \tag{1.11}$$

Производя в (1.10) последовательно следующие замены переменных $\xi=\nu^{-\mu^4}\eta$, $t_1=\eta_1, t_2=\eta_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\eta_2\eta_3^{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}, t_3=\eta_1^{\frac{\beta_1}{\beta_3}}\eta_2^{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\eta_3$ с числами $K=x^0-1, M=y^0-1, L=z^0-1$, когда СЛУ (1.6) имеет неотрицательное решение и $\xi=\nu^{-\mu^5}\eta$, $t_1=\eta_1\eta_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\eta_3^{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}, t_2=\eta_2, t_3=\eta_1^{\frac{\beta_1}{\beta_3}}\eta_2^{\frac{\beta_2}{\beta_3}}\eta_3$ с числами $K=x^1-1, M=y^1-1, L=z^1-1$, когда СЛУ (1.8) имеет неотрицательное решение, получим:

$$|I_m(\nu)|\le C\nu^{-(|\mu^4|+(m,\mu^4))}\iiint\limits_{R_+^3} t_1^K t_2^M t_3^L\ e^{-t_1^{2kl_1}-t_2^{2k\alpha_2}-t_3^{2k\beta_3}}dt_1dt_2dt_3,$$

либо

$$|I_m(\nu)|\le C\nu^{-(|\mu|^5+(m,\mu^5))}\iiint\limits_{R_+^3} t_1^K t_2^M t_3^L e^{-t_1^{2k\alpha_1}-t_2^{2kl_2}-t_3^{2k\beta_3}}dt_1dt_2dt_3.$$

Рассмотрим случай, когда $\Delta=0$. Разобьем интеграл на четыре части и оценим каждый из них по отдельности. Пусть $\mu_i^0=\min\limits_{j=1,\dots,5}\mu_i^j$, $(i=1,2)$.

$$|I_m(\nu)|\le\int\limits_0^{\nu^{-\mu_1^0}}d\xi_1\int\limits_0^{\nu^{-\mu_2^0}}d\xi_2\int\limits_0^{\infty}\xi^m e^{-P(\nu,\xi)}d\xi_3+\int\limits_{\nu^{-\mu_1^0}}^{0}d\xi_1\int\limits_0^{\nu^{-\mu_2^0}}d\xi_2\int\limits_0^{\infty}\xi^m e^{-P(\nu,\xi)}d\xi_3 \tag{1.12}$$

$$+\int_0^{\nu^{-\mu_1^0}} d\xi_1 \int_{\nu^{-\mu_2^0}}^{0} d\xi_2 \int_0^{\infty} \xi^m e^{-P(\nu,\xi)} d\xi_3 + \int_0^{\nu^{-\mu_1^0}} d\xi_1 \int_0^{\nu^{-\mu_2^0}} d\xi_2 \int_0^{\infty} \xi^m e^{-P(\nu,\xi)} d\xi_3$$

$$= I_m^1 + I_m^2 + I_m^3 + I_m^4.$$

После замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^1}\eta$ в интеграле I_m^1, получаем:

$$I_m^1 \le C\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))} \int_0^1 d\eta_1 \int_0^1 d\eta_2 \int_0^{\infty} \eta^m e^{-\eta_2^{2kl_2} - \eta_3^{2kl_3} - \eta^{2k\beta}} d\eta_3$$

$$\le C\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))} \int_0^{\infty} \eta_3^{m_3} e^{\eta_3^{2kl_3}} d\eta_3 \le C\nu^{-(|\mu^1|+(m,\mu^1))},$$

так как интеграл неотрицателен, и если $0 \le \xi_1 \le \nu^{-\mu_1^0}$ и $0 \le \xi_2 \le \nu^{-\mu_2^0}$, то $0 \le \eta_1 \le \nu^{\mu_1^1 - \mu_1^0} \le 1$ и $0 \le \eta_2 \le \nu^{\mu_2^1 - \mu_2^0} \le 1$.

Используя решение СЛУ (1.6), оценим I_m^2. Имеем, что $x = 0,\ \ y > 0$ и $z > 0$. Таким образом, после замены переменных $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$ имеем:

$$I_m^2 \le C\nu^{-(|\mu^2|+(m,\mu^2))} \int_{\nu^{\mu_1^2-\mu_1^0}}^{\infty} d\eta_1 \int_0^{\infty} d\eta_2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \eta_2^{y-1} \eta_3^{z-1} e^{-\eta_1^{2kl_1} - \eta_2^{2k\alpha_2} - \eta_3^{2k\beta_3}} d\eta_3$$

$$\le C\nu^{-(|\mu^2|+(m,\mu^2))}(C_1|\ln\nu| + C_2).$$

Аналогичным образом можно оценить интегралы I_m^3 и I_m^4, используя решения СЛУ (1.7) и (1.6), с помощью соответствующих замен переменных $\xi = \nu^{-\mu 3}\eta$ и $\xi = \nu^{-\mu^2}\eta$.

Подытожив все случаи, имеем, что

$$|I_m(\nu)| \le (C_1|\ln\nu| + C_2)\nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,5}(|\mu^i|+(m,\mu^i))}.$$

Пусть теперь в случае а) выполняются нестрогие неравенства.

Если $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{m_1+1}{m_2+1}$ и $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2} < \dfrac{m_3+1}{m_2+1}$, то решение СЛУ (1.6) – неотрицательное, и интеграл может быть оценен как в случае, когда $\Delta = 0$.

Если $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} < \dfrac{m_1+1}{m_2+1}$ и $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2} = \dfrac{m_3+1}{m_2+1}$, то $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3} < \dfrac{m_1+1}{m_3+1}$. Этот случай уже был рассмотрен.

Если $\frac{\beta_1}{\beta_3} = \frac{m_1+1}{m_3+1}$ и $\frac{\beta_2}{\beta_3} < \frac{m_2+1}{m_3+1}$, то $\frac{\beta_2}{\beta_1} < \frac{m_2+1}{m_1+1}$. Этот случай доказывается таким же образом, как и при $j_0 = 1$.

Если $\frac{\beta_1}{\beta_3} < \frac{m_1+1}{m_3+1}$ и $\frac{\beta_2}{\beta_3} = \frac{m_2+1}{m_3+1}$, то $\frac{\beta_1}{\beta_2} < \frac{m_1+1}{m_2+1}$, и можем применить случай $j_0 = 2$.

Лемма 1.2 доказана.

2. Мультианизотропные ядра и их свойства

Как и в §1 обозначим через

$$\hat{G}_{1,j}(t,\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{R^3} e^{-i(t,\xi)} (2k) \left(\nu \xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)} d\xi$$

и назовем мультианизотропными ядрами. Изучим свойства $\hat{G}_0, \hat{G}_{1,j} \in S$. Легко заметить, что $\hat{G}_0, \hat{G}_{1,j} \in S$.

Обозначим через $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ точку пересечения гиперплоскостей с внешними нормалями μ^1, μ^2, μ^5. Нетрудно заметить, что (γ, μ^3), $(\gamma, \mu^4) > 1$. Пусть между координатами вектора γ имеет место соотношение $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$. Тогда пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, 0)$ – точка пересечения плоскости XOY с гиперплоскостями, проходящими через грани многогранника $\Re$ с внешними нормалями μ^1, μ^2. И данная точка имеет координаты $\sigma_1 = \frac{\gamma_1 l_3}{l_3 - \gamma_3}$, $\sigma_2 = \frac{\gamma_2 l_3}{l_3 - \gamma_3}$. Кроме того, пусть $\delta = (\delta_1, 0, 0)$ – точка пересечения оси X с гиперплоскостью, проходящей через грань многогранника $\Re$ с внешней нормалью μ^1.

Лемма 2.1. *Пусть* $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$. *Тогда для любого мультииндекса* m *и любого четного числа* N, *для которой* $N\gamma, N\sigma, N\delta$ *имеют только четные координаты, существуют постоянные* $C_i, (i = 0,1,2)$ *такие, что для любого* $\nu : 0 < \nu < 1$ *имеет место неравенство*

$$\left|D^m \hat{G}_{1,j}\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,5}\left|\mu^i\right|} \frac{C_2\left|\ln\nu\right|^2 + C_1\left|\ln\nu\right| + C_0}{1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{N\sigma}+t^{N\delta})}. \qquad (2.1)$$

Лемма 2.2. *Пусть* $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$, *тогда существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для любого* $\nu \in (0,1)$

$$\iiint\limits_{R^3} \frac{dt}{1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{N\sigma}+\mathrm{t}^{N\delta})} \le C\nu^{\left|\mu^1\right|}. \qquad (2.2)$$

Лемма 2.3. *Пусть* $\gamma_1 < \gamma_2 = \gamma_3$ *и* $\nu \in (0,1)$. *Тогда для любого мультииндекса* $m = (\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \mathrm{m}_3)$ *и любого четного числа* N, *для которой* $N\gamma, N\sigma, \mathrm{N}\,\delta, \mathrm{Nr}$ *имеют только четные координаты, существуют постоянные* $C_i, (i = 0,1,2)$ *такие, что*

$$\left|D^m \hat{G}_{1,j}(\mathrm{t},\nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,5}\left(\left|\mu^i\right| + (\mathrm{m},\mu^i)\right)} (\mathrm{C}_2\left|\ln\nu\right|^2 + \mathrm{C}_1\left|\ln\nu\right| + \mathrm{C}_0)$$

$$\cdot\frac{1}{1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{N\sigma}+\mathrm{t}^{N\delta})} \le C\nu^{\left|\mu^1\right|}, \qquad (2.3)$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, 0)$ – *точка пересечения прямой, проходящей через точки* α^3 *и* γ *и плоскость* XOY, $r = (\mathrm{r}_1, 0, \mathrm{r}_2)$ – *точка пересечения прямой, проходящей через точки* α^2 *и* γ *и плоскость* XOY, *а точка* $\delta = (\delta_1, 0, 0)$ *определяется, как и в предыдущей лемме.*

Лемма 2.4. *Пусть* $\gamma_1 < \gamma_2 = \gamma_3$. *Тогда существует постоянная* $C > 0$ *такая, что для любого* $\nu \in (0,1)$

$$\iiint\limits_{R^3} \frac{dt}{(1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{N\sigma}+\mathrm{t}^{N\delta}))(1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{Nr}+\mathrm{t}^{N\delta}))} \le C\nu^{\left|\mu^1\right|}. \qquad (2.4)$$

Лемма 2.5. *Пусть* $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ *и* $\nu \in (0,1)$. *Тогда для любого мультииндекса* $m = (\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \mathrm{m}_3)$ *и любого четного числа* N, *для которой* $N\gamma, N\sigma, \mathrm{N}\,\delta, \mathrm{Nr}, \mathrm{Nk}, \mathrm{Nq}, \mathrm{Nm}$ *имеют только четные координаты, существуют постоянные* $C_i, (0,1,2)$ *такие, что*

$$\left|D^m \hat{G}_{1,j}(\mathrm{t},\nu)\right| \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,5}\left(\left|\mu^i\right| + (\mathrm{m},\mu^i)\right)} (\mathrm{C}_2\left|\ln\nu\right|^2 + \mathrm{C}_1\left|\ln\nu\right| + \mathrm{C}_0)$$

$$\cdot\frac{1}{1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{N\sigma}+\mathrm{t}^{N\delta})}\cdot\frac{1}{1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{Nr}+\mathrm{t}^{Nq})}\cdot\frac{1}{1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{Nk}+\mathrm{t}^{Nm})}, \qquad (2.5)$$

где $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,0)$ – *точка пересечения плоскости XOY с гиперплоскостями, проходящими через грани многогранника* $\Re$ *с внешними нормалями* μ^2 *и* μ^3, $r=(\mathrm{r}_1,0,\mathrm{r}_2)$ – *точка пересечения плоскости XOY с гиперплоскостями, проходящими через грани многогранника* $\Re$ *с внешними нормалями* μ^1 *и* μ^3, *а точка* $k=(0,\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2)$ – *точка пересечения плоскости XOY с гиперплоскостями, проходящими через грани многогранника* $\Re$ *с внешними нормалями* μ^2 *и* μ^3.

Лемма 2.6. *Пусть* $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3$. *Тогда существует постоянная* $C_i,(\mathrm{i}=0,1,2)$ *такие, что*

$$\iiint_{R^3}\frac{dt}{(1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{N\sigma}+\mathrm{t}^{N\delta}))(1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{Nr}+\mathrm{t}^{Nq}))} \tag{2.6}$$

$$\cdot\frac{1}{1+\nu^{-N}(\mathrm{t}^{N\gamma}+\mathrm{t}^{Nk}+\mathrm{t}^{Nm})}\le\nu^{-\min\limits_{i=1,2,3}\left|\mu^i\right|}(\mathrm{C}_2\left|\ln\nu\right|^2+\mathrm{C}_1\left|\ln\nu\right|+\mathrm{C}_0).$$

Лемма 2.7. *Пусть* $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\left(\frac{1}{l_1},\frac{1}{l_2},\frac{1}{l_3}\right)$. *Тогда существует постоянная* $C>0$ *такая, что для любого* $\nu\in(0,1)$

$$\left|\hat{G}_0(\mathrm{t},\nu)\right|\le\mathrm{C}\nu^{-|\lambda|-\max\limits_{i=1,\dots,5}((\lambda,\alpha^i)-1)}\frac{1}{1+\nu^{-N}(\mathrm{t}_1^{Nl_1}+\mathrm{t}_2^{Nl_2}+\mathrm{t}_3^{Nl_3})} \tag{2.7}$$

для некоторых постоянных C_1 *и* C_2.

3. Усреднение функций и интегральное представление через мультианизотропные ядра

Для любой функции f рассмотрим усреднение функции с ядром усреднения $\hat{G}_0(\mathrm{t},\nu)$:

$$f_\nu(\mathrm{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{R^3}f(\mathrm{t})\,\hat{\mathrm{G}}_0(\mathrm{t}-\mathrm{x},\nu)\,\mathrm{dt}. \tag{3.1}$$

Тогда $f_\nu(\mathrm{x})$ будет обладать обычными свойствами усредненной функции, т.е.

Лемма 3.1. *Если* $f \in L_p(\mathrm{R}^3)$, $1 < p < \infty$, *то* $f_\nu \in L_p(\mathrm{R}^3)$, $\|f_\nu\|_{L_p(R^3)} \to 0$ *при* $\nu \to \infty$ *и* $\lim\limits_{\nu\to 0}\|f_\nu - f\|_{L_p(\mathrm{R}^3)} = 0$.

Как и в работе [2] (см. Теорема 3.1), с помощью усреднения (3.1) мы можем доказать следующую теорему об интегральном представлении.

Теорема 3.1. *Пусть для функции* f *существуют обобщенные производные по С.Л. Соболеву* $D^{\alpha^i} f$, $(\mathrm{i} = 1,...,5)$, *где* α^i – *вершины вполне правильного многогранника* $\mathfrak{R}$ *и* $D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathrm{R}^3)$, $1 \le p < \infty$, $(\mathrm{i} = 1,...,5)$. *Тогда для почти всех* $x \in R^3$ *имеет место представление*

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{f}_h(\mathrm{x}) + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\varepsilon}^{h} d\nu \int_{R^3} D^{\alpha^i} f(\mathrm{t})\,\hat{\mathrm{G}}_{1,i}(\mathrm{t}-\mathrm{x},\nu)dt. \tag{3.2}$$

4 . Теоремы вложения для мультианизотропных пространств

Обозначим через $W_p^{\mathfrak{R}}(\mathrm{R}^3) = \{\mathrm{f} : \mathrm{f} \in \mathrm{L}_p(\mathrm{R}^3), \mathrm{D}^{\alpha^i}\mathrm{f} \in L_p(\mathrm{R}^3), \mathrm{i} = 1,...,5\}$ и назовем мультианизотропными пространствами С.Л. Соболева.

Имеет место следующая теорема вложения (для доказательства см. [2], Теорема 4.1):

Теорема 4.1. *Пусть* $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$, p *и* q $(\mathrm{p} \le q)$ *такие числа, что* $1 < p \le \infty$ *или* $1 \le p < \infty$ *при* $q = \infty$, $m = (\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \mathrm{m}_3)$ – *мультииндекс. Обозначим через*

$$\chi = \max_{i=1,...,5}\left(\left|\mu^i\right| + (\mathrm{m}, \mu^i)\right) - \left|\mu^1\right|\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Тогда при $\chi < 1$ $D^m W_p^{\mathfrak{R}}(R^3)$ *вложено в* $L_q\left(R^3\right)$, *т.е. любая функция* $f \in W_p^{\mathfrak{R}}(\mathrm{R}^3)$ *имеет обобщенную производную* $D^m f$, *принадлежащую классу* $L_q(\mathrm{R}^3)$, *и для любого* $h > 0$ *имеет место неравенство*

$$\left\|D^m f\right\|_{L_q(\mathrm{R}^3)} \le h^{1-\chi}\left(\mathrm{a}_2\left|\ln h\right|^2 + \mathrm{a}_1\left|\ln h\right| + \mathrm{a}_0\right)\sum_{i=1}^{5}\left\|D^{\alpha^i} f\right\|_{L_p(\mathrm{R}^3)}$$

$$+h^{-\chi}\left(\mathrm{b}_2\left|\ln h\right|^2 + \mathrm{b}_1\left|\ln h\right| + \mathrm{b}_0\right)\left\|f\right\|_{L_p(\mathrm{R}^3)}, \tag{4.1}$$

где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ *некоторые постоянные, не зависящие от* f *и* h.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karapetyan G.A.* Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane with one vertex of anisotropicity // Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), v. 51, № 1, 2016. PP. 1–10.
2. *Karapetyan G.A.* Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces for the three-dimensional case // Eurasian Mathematical Journal, v. 7, № 2, 2016. PP. 19–37.
3. *Sobolev S.L.* On a theorem of functional analysis // Mat. Sb., v. 4, 1938, pp. 471–497. English transl., Amer. Math. Soc. Transl., v. 34, № 2, 1963. PP. 39–68.
4. *Sobolev S.L.* Some applications of functional analysis in mathematical physics // Novosibirsk, 1988.
5. *Nikolskii S.M.* On a problem of S.L. Sobolev // Siberian Mathematical Journal, v. 3, № 6, 1962. PP. 845–857.
6. *Smith K.T.* Inequalities for formally positive integro-differential forms // Bull. Amer. Math. 1961. PP. 368–370.
7. *Il'in V.P.* Integral representations of differentiable functions and their application to questions of continuation of functions of classes Wpl (G) // Siberian Mathematical Journal, v. 8, № 3, 1967. PP. 573–586.
8. *Il'in V.P.* On inequalities between the norms of partial derivatives of functions of several variables // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics of the USSR, v. 84, 1965. PP. 144–173.
9. *Uspenskii S.V.* On the representation of functions determined by one class of hyperelliptic operators // Proceedings of Mathematical Institute of USSR Academy of Sciences, v. 117, 1972. PP. 292–299.
10. *Besov O.V.* On coercitivity in nonisotropic Sobolev spaces // Mathematics of the USSR-Sbornik, v.2, № 4, 1967. PP. 521–534.
11. *Besov O.V., Il'in V.P., Nikolskii S.M.* Integral representations of functions and embedding theorems // Nauka, Moscow (in Russian), 1975. P. 480.

EMBEDDING THEOREMS FOR THE THREE-DIMENSIONAL MULTIANISOTROPIC SPACES WITH TWO VERTICES OF ANISOTROPICITY

M. Araqelyan, H. Petrosyan

ABSTRACT

In current work we present a special integral representation of functions in the multianisotropic Sobolev spaces in the case when the Newton polyhedron has two vertices of anisotropicity. Using this representation, we prove embedding theorems of the abovementioned classes.

Keywords: multianisotropic spaces, embedding theorems, integral representation, multianisotropic polynomial.

ՆԵՐԴՐՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԳԱԳԱԹՆԵՐՈՎ ԵՌԱՉԱՓ ՄՈՒԼՏԻԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Մ.Կ. Առաքելյան, Հ.Ա. Պետրոսյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում ստացվում են հատուկ ինտեգրալային ներկայացումներ այն ֆունկցիաների համար, որոնք պատկանում են Սոբոլևի մուլտիանիզոտրոպ տարածություններին: Քննարկվում է այն դեպքը, երբ համապատասխան Նյուտոնյան բազմանիստն ունի անիզոտրոպության երկու գագաթներ: Կիրառելով ստացված ինտեգրալային ներկայացումները, նշված դասի ֆունկցիաների համար, ապացուցվում են նաև ներդրման թեորեմներ:

Հիմնաբառեր՝ մուլտիանիզոտրոպ տարածություններ, ներդրման թեորեմներ, ինտեգրալային ներկայացումներ, մուլտիանիզոտրոպ բազմանդամ:

УДК 517.9

СРАВНЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.Н. Маргарян, А.Г. Хоршикян

Российско-Армянский университет

vachagan.margaryan@yahoo.com, anahit1717@rambler.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКНМОН РА проекта NSCS 15T-1A197

АННОТАЦИЯ

На языке сравнения многочленов получены критерий гипоэллиптичности, почти гипоэллиптичности и рассмотрен вопрос о добавлений «младших» членов к таким многочленам.

Ключевые слова: гипоэллиптичность, почти гипоэллиптичность, сравнения многочленов.

MSC 2010 numbers: 12E10, 26C05.

Введение

Пусть N – множество натуральных чисел, $N_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}$, N_0^n – множество n-мерных мультииндексов, т.е. точек

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in N_0$, $j = 1, \dots n$, R^n и $E^n - n$ -мерные вещественные евклидовые пространства точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответственно, а $R_+^n := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n$, $\xi_j \geq 0$, $j = 1, \dots n\}$, $\mathbb{C}^n = R^n + iR^n (i^2 = -1) - n$-мерное комплексное пространство.

Для $\xi \in R^n (\xi \in \mathbb{C}^n)$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\xi| = (|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2)^{1/2}, \ \xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n}), \ |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

и

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \text{ где } D_j = \partial / \partial x_j, \ j=1, \dots, n.$$

Пусть $A = \{v^j\}_{j=1}^{k}, k \in N,\ v^j \in R_+^n,\ j = 1, \dots k$. Характеристическим многогранником (х. м.) набора A называется минимальный выпуклый многогранник $\mathcal{H}(A)$, содержащий множество $A \cup \{0\}$. Многогранник $\mathcal{H} \in R_+^n$ называется полным, если имеет вершину в начале координат и отличную от начала координат вершину на каждой оси ординат. Многогранник $\mathcal{H} \in R_+^n$ называется правильным (вполне правильным), если компоненты единичных внешних (относительно $\mathcal{H}$) нормалей (n-1)-мерных некоординатных граней неотрицательны (положительны).

Пусть $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ –линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ его полный символ, где сумма распространяется по конечному набору (P): $= \{\alpha \in N_0^n,\ \gamma_\alpha \neq 0\}$. Х. м. набора (P) называется х.м. оператора $P(D)$(многочлена $P(\xi)$).

Определение 1. (см[1] определение 11.1.2 и теоремы 11.1.1 и 11.1.3) Дифференциальный оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ называются гипоэллиптическими, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\{U \in D'(\Omega),\ P(D)U = 0$ на $\Omega\} \subset C^\infty(\Omega)$, где $D'(\Omega)$ – пространство обобщенных функций, а $\Omega \subset E^n$- область.
2) $D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty, \xi \in R^n, 0 \neq \alpha \in N_0^n$.
3) Существуют постоянные $a > 0$ и $C > 0$ такие, что $1+dp(\xi) \geq C|\xi|^a,\ \forall \xi \in R^n$, где $dp(\xi)$ – расстояние точки $\xi \in R^n$ от множества $\{\xi \in \mathbb{C}^n,\ P(\xi) = 0\}$.

Определение 2. (см. [2] или [3]) Многочлен P называется регулярным, если с некоторой постоянной $C > 0$,

$$|\xi^\alpha| \leq C(1 + |P(\xi)|), \forall \alpha \in \mathcal{H}(P), \xi \in R^n \tag{0.1}$$

Известно (см. [4]), что если х. м. регулярного многочлена P вполне правильный, то P гипоэллиптичен. При этом вполне правильность х. м. многочлена P является необходимым условием гипоэллиптичности P.

Из оценки (0.1) (см. [3]) непосредственно следует, что если х. м. $\mathcal{H}(Q)$ многочлена Q строго лежит в $\mathcal{H}(P)$, то с некоторой постоянной $C_1 > 0$ при достаточно малых $a \in \mathbb{C}$

$$C_1^{-1}|P(\xi)| \leq 1 + |P(\xi) + \alpha Q(\xi)| \leq C_1(1 + |P(\xi)|), \forall \xi \in R^n \qquad (0.2)$$

Определение 3. (см. [5]) Многочлен P называется почти гипоэллиптическим, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\sum_{\alpha \in N_0^n} |P^{(\alpha)}(\xi)| := \sum_{\alpha \in N_0^n} |D^\alpha P(\xi)| \leq C(1 + |P(\xi)|) \quad \forall \xi \in R^n.$$

Пусть I_n –множество тех многочленов P от n-переменных, для которых $P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty, \xi \in R^n$.

Известно (см. [4]), что если $P \in I_n$, то следующие условия эквивалентны:

1) P – почти гипоэллиптичен,
2) $\underline{lim}_{|\xi| \to \infty} d_p(\xi) > 0$,
3) Существует число $\delta_0 = \delta_0(P) > 0$ такое, что при всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\{\mathrm{U}, \mathrm{U}(x)\mathrm{e}^{-\delta|x|} \in \mathrm{L}_2(\mathrm{E}^\mathrm{n}), P(\mathrm{D})\mathrm{u} = 0\}$$
$$\subset \{\mathrm{U}, (\mathrm{D}^\alpha \mathrm{U}(x))\mathrm{e}^{-\delta|x|} \in \mathrm{L}_2(\mathrm{E}^\mathrm{n}), \forall \alpha \in \mathrm{N}_0^\mathrm{n}\}.$$

Определение 4. (см. [1] определения 10.3.4 и 10.4.4) Говорят, что многочлен P сильнее многочлена $Q(P$ доминирует над $Q)$ и записывают $Q \prec P(Q \prec\prec P)$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\tilde{Q}(\xi) \leq C\tilde{P}(\xi), \forall \xi \in R^n,$$
$$(\sup_\xi \tilde{Q}(\xi, t)/\tilde{P}(\xi, t) \to 0 \text{ при } t \to \infty),$$

где для данного многочлена Q,

$$\tilde{Q}(\xi) = \tilde{Q}(\xi, 1), a \ \tilde{Q}(\xi, t) = \sum_\alpha |\mathrm{Q}^{(\alpha)}(\xi)| \cdot |\mathrm{t}|^{|\alpha|}, \mathrm{t} \in R.$$

Если $\mathrm{Q} \prec P \prec Q$, то говорят, что многочлен P и Q имеют одинаковую силу.

Определение 5. (см. [7]) Говорят, что многочлен P мощнее многочлена Q и записывают $\mathrm{Q} < P$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$|Q(\xi)| \leq C(1+|P(\xi)|), \forall \xi \in R^n$$

Наша цель в настоящей работе найти критерии гипоэллиптичности и почти гипоэллиптичности многочленов в терминах сравнения и описать множество тех чисел, для которых выполняется оценка (0.2) тогда и только тогда, когда P гипоэллиптичен или почти гипоэллиптичен при $Q \prec P$.

§1. Критерии гипоэллиптичности и почти гипоэллиптичности в терминах сравнения

Предложение 1.1. Пусть P и Q многочлены с постоянными коэффициентами. Если

1) $Q < P$, *то* $Q \prec P$,
2) $Q \prec\prec P$, то $Q \prec P$,
3) $|Q(\xi)|/[1+|P(\xi)|] \to 0$ при $|\xi| \to \infty, \xi \in R^n$, то $Q \prec\prec P$.

Доказательство. Пусть $Q < P$. Тогда в силу леммы 10.4.2 работы [1] с некоторыми постоянными $C_j \geq 0$, j= 1,2,3 из условия $Q < P$ имеем

$$C_1\tilde{Q}(\xi) \leq \sup_{|\eta|\leq 1}|Q(\xi+\eta)| \leq C_2 \sup_{|\eta|\leq 1}(1+|P(\xi+\eta)|) \leq C_3\tilde{P}(\xi), \xi \in R^n,$$

т.е. $Q \prec P$.

Утверждение пункта 2) непосредственно следует из теоремы 10.4.3 работы [1].

Для доказательства утверждения пункта 3) достаточно, в силу теоремы 10.4.6 работы [1], показать что

$$inf_{t\in R} sup_{\xi \in R^n} |Q(\xi)|/\tilde{P}(\xi,t) = 0.$$

Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$

$$D_\varepsilon := \{\xi \in R^n, |Q(\xi)|/[1+|P(\xi)|] \geq \varepsilon\}.$$

Так как, в силу условия $|Q(\xi)|/[1+|P(\xi)|] \to 0$ при $|\xi| \to \infty$, $\xi \in R^n$, для любого числа $\varepsilon > 0$ множество D_ε ограничено, то

$$inf_{t\in R} sup_{\xi \in D_\varepsilon} |Q(\xi)|/\tilde{P}(\xi,t) \leq \lim_{t\to\infty} sup_{\xi \in D_\varepsilon} |Q(\xi)|/\tilde{P}(\xi,t) = 0$$

Следовательно для любого $\varepsilon > 0$

$$inf_{t\in R}sup_{\xi\in R^n}|Q(\xi)|/\tilde{P}(\xi,t) = inf_{t\in R}sup_{\xi\in R^n\setminus D_\varepsilon}|Q(\xi)|/\tilde{P}(\xi,t).$$

Так как, очевидно, что с некоторой постоянной $C_4 > 0$

$$\tilde{P}(\xi,t) \geq C_4(|P(\xi)| + |t|^m), \xi \in R^n \text{ и } t \in R,$$

где $m := max\{|\alpha|, \alpha \in (P)\}$, то отсюда при $|t| \geq 1$ получаем

$$inf_{t\in R}sup_{\xi\in R^n}|Q(\xi)|/\tilde{P}(\xi,t) \leq C_4{}^{-1}\varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем соотношение (1.1). Прделожение 1.1 доказано.

Лемма 1.1. Для гипоэллиптического многочлена P следующие условия эквивалентны:

1) $Q \ll P$,
2) $|Q(\xi)|/[1+|P(\xi)|] \to 0$ при $|\xi|\to\infty$, $\xi\in R^n$.

Доказательство. Так как, в силу предложения 1.1, утверждение пункта 1) следует из пункта 2) (не зависимо от гипоэллиптичности P), то покажем, что при выполнении пункта 1) выполняется и пункт 2) если $P-$ гипоэллиптичен. Предположим обратное. Пусть для гипоэллиптического многочлена P и многочлена Q такого, что $Q \ll P$, следует что

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|Q(\xi)|/[1 + |P(\xi)|] \neq 0.$$

Тогда существует число $C_1 > 0$ и последовательность

$\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$, $|\xi^s|\to\infty$ при s→∞ ,

для которых $|Q(\xi)| \geq C_1(1 + |P(\xi)|)$, $s = 1,2 \ldots$.

Так как, в силу гипоэллиптичности P, $P(\xi)\to\infty$ при $|\xi|\to\infty$, $\xi\in R^n$, то отсюда, не умаляя общности можно считать, что

$$|Q(\xi^s)| \geq (C_1/2)|P(\xi^s)|, \mathrm{s} = 1,2 \ldots \quad (1.2)$$

Обозначим $t_s := \min_{0\neq\alpha\in N_0^n}\left|P(\xi^s)/P^{(\alpha)}(\xi^s)\right|^{1/|\alpha|}, s = 1,2 \ldots$

Так как $|\xi^s|\to\infty$ при s→∞ и P гипоэллиптичен , то $t_s \to \infty$ при s→∞. Тогда с некоторой постоянной $C_2 > 0$, в силу оценки (1.2) имеем

$$sup_{\xi\in R^n}\,\tilde{Q}(\xi,t_s)/\tilde{P}(\xi,t_s) \geq \tilde{Q}(\xi^s,t_s)/\tilde{P}(\xi^s,t_s) \geq |Q(\xi^s)|/\tilde{P}(\xi^s,t_s)=$$

$$=|Q(\xi^s,t_s)|/\left[|P(\xi^s)| + \sum_{0\neq\alpha\in N_0^n}\left|P^{(\alpha)}(\xi^s)\right|t_s^{|\alpha|}\right] \geq |Q(\xi^s)|/C_2|P(\xi^s)| \geq C_1/2C_2 > 0,$$

что противоречит условию $Q \prec\prec P$. Полученное противоречие доказывает, что при условии выполнения пункта 1) леммы выполняется и пункт 2). Лемма доказана.

Лемма1.2. Для почти гипоэллиптического многочлена P следующие условия эквивалентны:

1) $Q < P$,
2) $Q \prec P$.

Доказательство. В силу предложения 1 следует, что $Q \prec P$, если $Q < P$, не зависимо от почти гипоэллиптичности P. Покажем, что если многочлен P почти гипоэллиптичен и $Q \prec P$, т.е. с некоторой постоянной $C_1 > 0, \tilde{Q}(\xi) \leq C_1\tilde{P}(\xi), \xi \in R^n$, то $Q < P$. Так как для почти гипоэллиптического многочлена P с некоторой постоянной $C_2 > 0$,

$$\tilde{P}(\xi) = \sum_\alpha P^{(\alpha)}(\xi) \leq C_2(1 + |P(\xi)|), \forall\, \xi \in R^n, \text{ то}$$

$$|Q(\xi)|/[1 + |P(\xi)|] \leq C_2\left(|Q(\xi)|/\tilde{P}(\xi)\right) \leq$$

$$\leq C_2\left(\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi)\right) \leq C_1C_2, \forall\, \xi \in R^n, \text{т. е. } Q < P.$$

Лемма доказана.

Теорема 1.1. Многочлен P гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда из условия $Q \prec\prec$ P следует, что при

$$|\xi|\to\infty,\ \xi\in R^n\ |\,Q(\xi)\,|/[1+|P(\xi)\,|]\to 0.$$

Доказательство. Если P гипоэллиптичен, то в силу леммы 1.1 имеем, что при $Q \prec\prec$ P следует, что $|\,Q(\xi)\,|/[1+|P(\xi)\,|\,]\to 0$, когда $|\xi|\to\infty$, $\xi\in R^n$.

Докажем обратное. Пусть для многочлена P из условия $Q \prec\prec$ P следует, что $Q(\xi)\ |/[1+|\mathrm{P}(\xi)\,|\,]\to 0$, когда $|\xi|\to\infty, \xi\in R^n$. Так как для любого $0 \neq \alpha\epsilon N_0^n$, $D^\alpha P \prec\prec$ P, то отсюда получаем, что $|D^\alpha P(\xi)/P(\xi)| \to 0$ при $|\xi|\to\infty, \xi\in R^n, 0 \neq \alpha\epsilon N_0^n$,
т.е. P гипоэллиптичен. Теорема доказана.

Теорема 1.2. Многочлен P почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда из условия $Q \prec\prec P$ следует $Q < P$.

Доказательство. Пусть P почти гипоэллиптичен. Так как, в силу предложения 1.1 $Q \prec P$ при $Q \prec\prec P$, то в силу леммы 1.2 получаем, что $Q < P$ при $Q \prec\prec P$, если P почти гипоэллиптичен. Обратное. Пусть для многочлена P из условия $Q \prec\prec P$ следует $Q < P$. Так как для любого $0 \neq \alpha \epsilon N_0^n,$ $P^{(\alpha)} \prec\prec P$, то в силу теоремы $P^{(\alpha)} < P$, $0 \neq \alpha \epsilon N_0^n$.

Следовательно с некоторой постоянной $C > 0$, при всех $\xi \in R^n$

$$\sum_\alpha P^{(\alpha)}(\xi) = |P(\xi)| + \sum_{0 \neq \alpha \epsilon N_0^n} \left|P^{(\alpha)}(\xi)\right| \leq |P(\xi)| + C(1 + |P(\xi)|) \leq$$

$$(C+1)(1 + |P(\xi)|),$$

$\forall \xi \in R^n$, многочлен P почти гипоэллиптичен. Теорема 1.2 доказана.

§2. Добавление «младших» членов, сохраняющие исходные свойства многочленов.

Лемма 2.1. Пусть многочлен P и Q с постоянными коэффициентами имеют одинаковую мощность, т.е. $Q < P < Q$. Тогда если

1) $P -$ гипоэллиптичен, то и $Q -$ гипоэллиптичен,
2) $P -$ почти гипоэллиптичен, то и $Q -$ почти гипоэллиптичен.

Доказательство. Так как для любых многочленов P и Q при $Q < P$ следует, что $P \prec Q$ (см. предлложение 1.1), то утверждение пункта 1) леммы докажем при более слабой условии, то есть когда $Q \prec P \prec Q$. Пусть P гипоэллиптичен. Тогда из условия $Q \prec P \prec Q$ в силу гипоэллиптичности P с некоторыми постоянными $C_1 \geq C_2 \geq 1$ имеем

$$C_1^{-1}\tilde{Q}(\xi) \leq C_2^{-1}\tilde{P}(\xi) \leq 1 + |P(\xi)| \leq C_2\tilde{P}(\xi) \leq C_1\tilde{Q}(\xi), \xi \in R^n \quad (2.1)$$

Так как при всех $0 \neq \alpha \epsilon N_0^n$, $Q^{(\alpha)} \prec\prec Q$, то на основании теоремы 10.4.3 работы [1] следует, что $Q^{(\alpha)} \prec\prec P$ при $0 \neq \alpha \epsilon N_0^n$. Тогда, в силу теоремы 1.1, т.к. P гипоэллиптичен при $|\xi| \to \infty$, $\xi \in R^n$ имеем, что

$$\textstyle\sum_{\alpha \neq 0} |Q^{(\alpha)}(\xi)| / [1 + |P(\xi)|] \to 0.$$

Отсюда в силу оценки 2.1 при $|\xi| \to \infty$, $\xi \in R^n$ получаем

$$\sum_{\alpha\neq 0}|Q^{(\alpha)}(\xi)|/\tilde{Q}(\xi) \leq C_1\sum_{\alpha\neq 0}|Q^{(\alpha)}(\xi)|/[1+|\mathrm{P}(\xi)\,|] \to 0.$$

Отсюда непосредственно следует гипоэллиптичность многочлена Q.

Докажем утверждение пункта 2). Из условия $Q < P < Q$ с некоторой постоянной $C_3 \geq 1$ имеем

$$C_3^{-1}(1+|Q(\xi)|) \leq\ 1+|P(\xi)| \leq C_3(1+|P(\xi)|)\ \xi \in R^n.$$

Так как при $Q < P$ следует, что $\mathrm{P} \prec Q$ (см. предлложение 1.1), то отсюда с некоторыми постоянными $C_j > 0, j = 4{,}5{,}6$ в силу почти гипоэллиптичности P имеем

$$\tilde{Q}(\xi) \leq C_4\tilde{P}(\xi) \leq C_5(1+|P(\xi)|) \leq C_6(1+|\mathrm{Q}(\xi)|),\ \xi \in R^n, \tag{2.2}$$

т.е. Q почти гипоэллиптичен. Лемма доказана.

На примере покажем, что утверждение пункта 2) леммы перестает быть справедливым, если условие $Q < P < Q$ заменить на $Q \prec P \prec Q$.

Пример 1. Пусть n=2, $P(\xi) = \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2$ и $Q(\xi) = \xi_1^2 \cdot \xi_2^2$. Не трудно заметить, что многочлены P и Q имеют одинаковую силу, но не имеют одинаковую мощность. При этом P почти гипоэллиптичен, а Q не является почти гипоэллиптическим.

Тем не мение справедлива следующая:

Теорема 2.1. Пусть $Q \prec P$ многочлены с постоянными коэффициентами, где P гипоэллиптичен или почти гипоэллиптичен. Тогда существует число $\Delta \in [0,\infty), \Delta = \Delta(Q,P)$ такое, что при всех $a \in \mathbb{C}, |a|\Delta < 1$ многочлены P и $P + aQ$ имеют одинаковую мощность. Следовательно в силу леммы 2.1 многочлен $P + aQ$, $|a|\Delta < 1$ гипоэллиптичен при гипоэллиптичности Р и почти гипоэллиптичен при почти гипоэллиптичности P.

Доказательство: непосредственно следует из оценок (2.1) (при гипоэллиптичности P), (2.2) (при почти гипоэллиптичности P) из леммы 2.1 и из следующей леммы 2.2.

Лемма 2.2. Пусть $Q < P$ многочлены с постоянными коэффициентами. Тогда существует число $\Delta = \Delta(Q,P) \in [0,\infty)$, такое что при всех $a \in \mathbb{C}, |a|\Delta < 1$ многочлены P и $P + aQ$ имеют одинаковую мощность.

Доказательство. Из условия $Q < P$ леммы имеем, что

$$\Delta := \overline{lim}_{|\xi|\to\infty} |Q(\xi)|/[1+|P(\xi)|] \in [0,\infty) \qquad (2.3)$$

Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $|a|\Delta < 1$. Из условия $|a|\Delta < 1$ следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $|a|(\Delta+\varepsilon) < 1$. Из (2.3) следует, что существует число $M = M(P, Q, \varepsilon) > 0$, для которого при

$$|\xi| \geq \mathrm{M}, |Q(\xi)|/[1+|P(\xi)|] \leq \Delta + \varepsilon.$$

При $|\xi| \geq \mathrm{M}$, $\xi \in R^n$ имеем

$$1 + |\mathrm{P}(\xi) + aQ(\xi)| \geq 1 + |\mathrm{P}(\xi)| - |a||Q(\xi)|$$
$$\geq (1+|\mathrm{P}(\xi)|)(1-|a|(\Delta+\varepsilon)).$$

Так как при $|\xi| \leq \mathrm{M}, \xi \in R^n$ многочлены P и Q ограниченны, то отсюда для таких a с некоторой постоянной $C_1 = C_1(a) \geq 1$ получаем

$$C_1^{-1}(1+|\mathrm{P}(\xi)|) \leq 1 + |\mathrm{P}(\xi) + aQ(\xi)| \leq C_1(1+|\mathrm{P}(\xi)|), \xi \in R^n$$

Лемма 2.2 доказана.

На примере покажем, что в лемме 2.2 радиус области равно $1/\Delta$, где Δ определяется по формуле (2.3).

Пример 2. Пусть n=2, $P(\xi) = \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2$ и $\mathrm{Q}(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Не трудно проверить, что $\mathrm{Q} < P$ и $\overline{lim}_{|\xi|\to\infty} |Q(\xi)|/(1+|P(\xi)|) = 1$. При этом если $a \leq -1$, то $\mathrm{P}(\xi) + aQ(\xi) = \xi_1^2 \cdot \xi_2^2 + (a+1)(\xi_1^2 + \xi_2^2)$ не мощнее P.

Через I^n обозначим множество тех вещественных многочленов P от n-переменных, для которых $P(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$, $\xi \subset R^n$.

Теорема 2.2. Пусть P и Q – многочлены с вещественными постоянными коэффициентами, $P \in \mathrm{I}^n$, $\mathrm{ord}Q < ord\, P$ и $\Delta > 0$ некоторое число. Если многочлен P и $P + aQ$ при $|a|\Delta < 1$, $a \in R$ имеют одинаковую мощность, то $\overline{lim}_{|\xi|\to\infty} |Q(\xi)|/|P(\xi)| \leq \Delta$.

Доказательство. Предположим обратное, что

$$\delta := \overline{\lim_{|\xi|\to\infty}} |Q(\xi)|/|P(\xi)| > \Delta.$$

Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$, $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$, такая что

$$|Q(\xi^s)| \geq (\delta+\Delta)/2 \cdot |P(\xi^s)|, \qquad s = 1,2 \ldots$$

Так как P и Q —многочлены с вещественными коэффициентами, то существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$, которую так же обозначим через $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty}$, для которого либо

$$\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) \geq (\delta + \Delta)/2\,, s = 1,2\,...,$$

либо

$$\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) \leq -(\delta + \Delta)/2.$$

Ради определенности пусть

$$\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) \geq (\delta + \Delta)/2\,, s = 1,2\,... \qquad (2.5)$$

При $\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) \leq -(\delta + \Delta)/2\,, s = 1,2\,...$ доказательство проводится аналогично. Из условия $\mathrm{ord}Q < ordP$ теоремы следует, что существует последовательность $\{\eta^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$, $|\eta^s| \to \infty$ при $s \to \infty$, для которого $Q(\eta^s)/P(\eta^s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Так как $Q(\xi)/P(\xi)$ непрерывна при достаточно больших $\xi \in R^n$ (условие $P \in I^n$), то отсюда и из оценки (2.5) следует, что существует последовательность $\{\eta^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$, $|\eta^s| \to \infty$ при $s \to \infty$, для которого $Q(\eta^s)/P(\eta^s) = (\delta + \Delta)/2\,, s = 1,2\,...$

Так как $(2/(\delta + \Delta)) \cdot \Delta < 1$, то в силу условия теоремы, многочлены P и $P + (2/(\delta + \Delta)) \cdot Q$ должны иметь одинаковую мощность, что невозможно, т.к. $P \in I^n$, а $P(\eta^s) + (2/(\delta + \Delta))Q(\eta^s) = 0$ при $s = 1,2\,...$ и $|\eta^s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что оценка (2.4) верна. Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть $P \in I^n$ и Q многочлены с постоянными вещественными коэффициентами такие, что

$$0 < \Delta_1 = \underline{lim}_{|\xi| \to \infty} |Q(\xi)/P(\xi)|, \quad \infty > \Delta_2 = \overline{lim}_{|\xi| \to \infty} |Q(\xi)/P(\xi)|.$$

Тогда

1) $Q \in I^n$,
2) P и Q имеют одинаковую мощность,
3) Для любого $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{\Delta_1}\right) \cup \left(-\frac{1}{\Delta_2}, \frac{1}{\Delta_2}\right) \cup \left(\frac{1}{\Delta_1}, +\infty\right)$

многочлены P, Q и $P + aQ$ имеют одинаковую мощность.

Доказательство. Утверждение пункта 1) непосредственно следует из условия $P \in \mathrm{I}^n$ и $\Delta_1 > 0$. Утверждение пункта 2) непосредственно следует из условий $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 < \infty$.

Докажем утверждение пункта 3). Если $a \in \left(-\frac{1}{\Delta_2}, \frac{1}{\Delta_2}\right)$, т.е. $|a|\Delta < 1$, то утверждение пункта 3) непосредственно следует из пункта 2) и теоремы 2.2.

Так как в силу условия теоремы $\infty > \frac{1}{\Delta_1} = \overline{lim}_{\xi\to\infty} |Q(\xi)/P(\xi)|$, то по теореме 2.2 имеем, что многочлены Q и $Q + bP$ имеют одинаковую силу при $|b|\frac{1}{\Delta_1} < 1$. Отсюда для любого $b \in R, b \neq 0$, $\frac{1}{|b|}\Delta_1 > 1$ получим $b\left(\frac{1}{b}Q + P\right) = Q + bP$ и Q, следовательно $P + \frac{1}{b}Q$ и Q имеют одинаковую силу. Т.к. $\frac{1}{b} \in \left(-\infty, -\frac{1}{\Delta_1}\right) \cup \left(\frac{1}{\Delta_1}, +\infty\right)$ при $\frac{1}{|b|}\Delta_1 > 1$, $b \neq 0$, то этим в силу пункта 2) утверждение пункта 3) полностью доказана. Теорема 2.3 доказана.

Следствие 2.1. Если, при условиях теоремы многочлен P гипоэллиптичен или почти гипоэллиптичен, то для любого $a \in R$, $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{\Delta_1}\right) \cup \left(-\frac{1}{\Delta_2}, \frac{1}{\Delta_2}\right) \cup \left(\frac{1}{\Delta_1}, +\infty\right)$ многочлен $P + aQ$ такой же. Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.3 и леммы 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, том 2, 1986.
2. *Казарян Г.Г., Маргарян В.Н.* Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов. Труды МИАН ССР, 1979, том 150, 128–142.
3. *Казарян Г.Г., Маргарян В.Н.* Об одном классе гипоэллиптических операторов. Изв. НАН Армения, том 41, н. 6, 39–56, 2006г..
4. *Михайлов В.П.* О поведений на бесконечности одного класса многочленов. Труды МИАН СССР, том 150, н. 4, 143–159, 1965.
5. *Gindikin S., Volevich L.* The Method of Newtons Polyhedrons in the Theory of PDE, Kluwer Acad. Publisher (1992).

6. *Никольский С.М.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения. ДАН СССР, том 146, н. 4, 767–769, 1962.
7. *Kazaryan G.G.* On almost hypoelliptic Polynomilas. Dokl. Poss. Acad. Nauk, 398, n. 6, 701–703, 2004.

COMPARISON OF POLYNOMIALS OF MANY VARIABLES

V.N. Margaryan, A.G. Khorshikyan

SUMMARY

In terms of comparison of Polynomials was obtained criterion for hypoellipticity and almost hypoellipticity and considered the question of addition of lower order members to such polynomials.

ԲԱԶՄԱԹԻՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Վ.Ն. Մարգարյան, Ա.Գ. Խորշիկյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Բազմանդամների համեմատության հիման վրա ստացվել է հիպոէլիպտիկության և համարյա հիպոէլիպտիկության չափանիշը, ինչպես նաև դիտարկվել է բազմանդամներին կրտսեր անդամների ավելացման հարցը:

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Г.С. Мелкумян

Российско-Армянский университет

gevorgmelkoumyan@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В данной научной статье рассмотрены медленно меняющиеся весовые функции и установлены некоторые их свойства, а также получено достаточное условие гипоэллиптичности линейного оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: медленно растущая весовая функция, медленно меняющаяся весовая функция, функциональная размерность пространства, гипоэллиптичность.
MSC2010 number: 26A12

§1. Основные обозначения, определения и поставленные задачи

Пусть N множество натуральных чисел, Z множество целых чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, N_0^n $(n \in N)$ множество n-мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, $Z^n = \{\alpha : \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n),\ \alpha_i \in Z,\ i = 1, ..., n\}$, R^n и E^n n-мерные вещественные эвклидовы пространства точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и $x = (x_1, ..., x_n)$, соответственно, $R_+^n = \{\xi \in R^n : \xi_i \geq 0,\ i = 1, ..., n\}$ и $C^n = R^n \times iR^n$ $(i^2 = -1)$. Для любого $\xi \in R^n$, $\nu \in R_+^n$, $t > 0$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $|\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} ... |\xi_n|^{\nu_n}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $\|\xi\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$,

$|\nu| = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$, $t\xi = (t\xi_1, ..., t\xi_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = i^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, либо $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, ..., n.$

Пусть $A \subset R_+^n$ некоторый конечный набор.

Определение 1. (см. например [1] или [2]) Характеристическим многогранником набора A называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R}(A) \subset R_+^n$, содержащий множество $A \cup \{0\}$.

Определение 2. (см. [1] или [2]) Многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ называется полным, если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат.

Определение 3. (см. [1] или [2]) Полный многогранник $\mathfrak{R} \subset R_+^n$ называется вполне правильным, если компоненты внешних (относительно $\mathfrak{R}$) нормалей всех (n-1)-мерных некоординатных граней положительны.

Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{R}$ через $\Lambda(\mathfrak{R})$ обозначим множество внешних нормалей $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ (n-1)-мерных некоординатных граней, для которых $\min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i = 1$.

Пусть E линейное топологическое пространство.

Определение 4. (см. [3]) E называется локально выпуклым, если существует выпуклая окрестность нуля.

Пусть E локально выпуклое линейное пространство, $U-$окрестность нуля в E, а $A \subset E$ некоторое множество.

Определение 5. (см. [4]) Множество B называется $\varepsilon > 0$ сетью множества A относительно U, если $A \subset B + \varepsilon U$.

Для $A \subset E$ через $N(A, \varepsilon U)$ обозначим наименьшее количество элементов $\varepsilon > 0$ сети множества A относительно U. Число $H(A, \varepsilon U) = \ln N(A, \varepsilon U)$ называется $\varepsilon-$энтропией множества A относительно U.

Определение 6. (см. [4]) Функциональной размерностью линейного локально выпуклого пространства E называется число

$$dfE = \sup_U \inf_V \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\ln H(V, \varepsilon U)}{\ln \ln (1/\varepsilon)},$$

где U и V пробегают все окрестности нуля пространства E.

Пусть $P(D)=\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}D^{\alpha}$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}\xi^{\alpha}$ его полный символ, где сумма распространяется по конечному набору

$$(P)=\{\alpha\in N_0^n:\gamma_{\alpha}\neq 0\}.$$

Определение 7. Характеристическим многогранником многочлена $P(\xi)$ называется характеристический многогранник набора $(P)=\{\alpha\in N_0^n:\gamma_{\alpha}\neq 0\}$.

Определение 8. (см. [5] определение 11.1.2 и теорему 11.1.3) Линейный дифференциальный оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами называется гипоэллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1.) $N(P)=\{u\in C(R^n):P(D)u=0\}\subset C^{\infty}(R^n)$,

2.) $|\operatorname{Im}\zeta|\to\infty$ при $\|\zeta\|\to\infty$, где $\zeta\in\{\eta\in C^n:P(\eta)=0\}:=\Im(P)$,

3.) для любого $\alpha\in N_0^n$, $|\alpha|\neq 0$ при $\|\xi\|\to\infty$, $\xi\in R^n$

$$\left|\frac{D^{\alpha}P(\xi)}{P(\xi)}\right|\to 0,$$

4.) $d_p(\xi)\to\infty$ при $\|\xi\|\to\infty$, $\xi\in R^n$, где $d_p(\xi)$ расстояние точки $\xi\in R^n$ от множества $\Im(P)$,

5.) существуют положительные числа k и c, для которых

$$1+d_p(\xi)\geq k\|\xi\|^c,\quad \forall\xi\in R^n.$$

Замечание 1. (см. [5] доказательство теоремы 11.4.2) Для любого многочлена P с постоянными коэффициентами существует число $k>0$, для которого

а.) $d_p(\xi)\leq k(1+\|\xi\|),\quad \forall\xi\in R^n$, (1.1)

б.) $d_p(\xi+\eta)\leq d_p(\xi)+\|\eta\|,\quad \forall\xi,\eta\in R^n$. (1.2)

Определение 9. Дифференциальный оператор $P(D)=\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}D^{\alpha}$ с постоянными коэффициентами называется эллиптическим, если

$$\sum_{|\alpha|=m}\gamma_{\alpha}\xi^{\alpha}\neq 0 \text{ при } \|\xi\|\neq 0,\quad \xi\in R^n,$$

где $m=\max\{|\alpha|:\alpha\in(P)\}$.

Ю. Комурой в работе [6] доказано, что

I.) если $P(D)$ эллиптичен, то $dfN(P)=n,$

II.) если $P(D)$ гипоэллиптичен, то $dfN(P)<+\infty.$

Определение 10. (см. [1] или [2]) Дифференциальный оператор

$$P(D)=\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}D^{\alpha}$$

с постоянными коэффициентами называется регулярным, если с некоторой постоянной $c>0$

$$\sum_{\alpha\in\Re(P)\cap N_0^n}\left|\xi\right|^{\alpha}\le c(\left|P(\xi)\right|+1),\quad \forall\xi\in R^n.$$

В работе [8] доказано, что если для линейного дифференциального оператора $P(D)$

$$dfN(P)=n,$$

то $P(D)$ эллиптичен, а для регулярных гипоэллиптических операторов $P(D)$

$$dfN(P)=\max\{\left|\lambda\right|:\lambda\in\Lambda(\Re(P))\}.$$

Для многочлена $P(\xi)$ с постоянными коэффициентами от n - переменных, индекса $j:1\le j\le n$ и $t>0$ через $A_j(d_p,t)$ обозначим

$$A_j(d_p,t):=\{\xi^j:\exists\theta\in R,\ d_p(\xi^j(\theta))\le t\},$$

где $\xi^j=(\xi_1,...,\xi_{j-1},\xi_{j+1},...,\xi_n)\in R^{n-1}$,

а $\xi^j(\theta)=(\xi_1,...,\xi_{j-1},\theta,\xi_{j+1},...,\xi_n)\in R^n$, т.е. $A_j(d_p,t)$ является проекцией множества

$$\Phi_2(d_p,t):=\{\xi\in R^n:d_p(\xi)\le t\}$$

на координатную гиперплоскость $\xi_j=0$.

В работе [8–9] доказано, что функциональная размерность пространства решений гипоэллиптического уравнения $P(D)u=0$ связана с поведением мер множеств $A_j(d_p,t)$, $j=1,...,n$ относительно t при $t\to+\infty$ и получена следующая оценка:

$$dfN(P)\ge 1+\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln mes(A_1(d_p,t))}{\ln t}.$$

Определение 11. Неотрицательная функция $h(\xi)$, определенная в R^n, называется медленно растущей весовой функцией, если существуют числа $c>0$ и r такие, что

$$h(\xi+\eta)\le ch(\xi)(1+\|\eta\|)^r,\ \xi,\eta\in R^n.$$

Определение 12. Медленно растущая весовая функция $h(\xi)$ называется медленно меняющейся весовой функцией, если $h(\xi+\eta)\le h(\xi)+\|\eta\|$ для всех $\xi,\eta\in R^n$.

Пусть $\mathfrak{R}\subset R_+^n$ вполне правильный многогранник, для которого $\max\limits_{\nu\in\mathfrak{R}}(\nu,\lambda)\le 1$ при всех $\lambda\in\Lambda(\mathfrak{R})$. Обозначим

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi)=\sum_{\nu\in\mathfrak{R}^0}|\xi|^{\nu},$$

где $\mathfrak{R}^0$ – множество вершин многогранника $\mathfrak{R}$.

Замечание 2. Из условий (1.1) – (1.2) следует, что для любого дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами функция $d_p(\xi)$ является медленно меняющейся функцией.

Замечание 3. Нетрудно проверить, что для любого вполне правильного многогранника функция $h_{\mathfrak{R}}(\xi)$ является медленно растущей весовой функцией, а при $(\nu,\lambda)\le 1$, $\forall\nu\in\mathfrak{R}$, $\lambda\in\Lambda(\mathfrak{R})$ медленно меняющейся.

Наша цель для заданных весовых функций $d(\xi)$ вычислить

$$F_1(d):=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln card(\Phi_1(d,t))}{\ln t}$$

и найти его связь с

$$F_2(d):=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln m(\Phi_2(d,t))}{\ln t},$$

где $m-$мера Лебега, $\Phi_1(d,t):=\{\alpha\in N_0^n:d(\alpha)\le t\}$, $cardA-$количество элементов множества A.

§2. Основные результаты

Теорема 1. Для любой медленно меняющиеся весовой функции $d(\xi)$ $F_2(d)\ge n$.

Доказательство. Обозначим $S_n=\{\xi\in R^n:\|\xi\|\le 1\}$, и положим $|S_n|:=m(S_n)$.

Т.к. в силу условия теоремы $d(\xi)\le d(0)+\|\xi\|,\ \forall\xi\in R^n$, то при $t>d(0)$ имеем, что $G(t):=\{\xi\in R^n:\|\xi\|\le t-d(0)\}\subseteq\Phi_2(d,t)$.
Следовательно,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln m(\Phi_2(d,t))}{\ln t}\ge\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln m(G(t))}{\ln t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\int\limits_{G(t)}d\xi}{\ln t}. \qquad (2.1)$$

В интеграле, производя замену переменных $\xi=(t-d(0))\omega$, получим

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\int\limits_{G(t)}d\xi}{\ln t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\int\limits_{\|\omega\|\le1}(t-d(0))^n d\omega}{\ln t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln((t-d(0))^n|S_n|)}{\ln t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(t-d(0))^n+\ln|S_n|}{\ln t}=n.$$

Отсюда в силу (2.1) непосредственно получаем утверждение теоремы. **Теорема 1 доказана.**

Теорема 2. Если для оператора $P(D)$ $F_2(d_p)$ конечен, то $P(D)$ гиппоэллиптичен.

Доказательство. Мы докажем, что если $F_2(d_p)<+\infty$, то $d_p(\xi)\to\infty$ при $\|\xi\|\to\infty$ (см. определение 8, пункт 4). Предположим обратное. Это означает, что существуют число $M>0$ и последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{+\infty}$, для которых $d_p(\xi^s)\le M$, при $\|\xi^s\|\to\infty$, $s=1,2,\ldots$. Не умаляя общности, можно считать, что для всех l,m; $l\ne m$ $\|\xi^l-\xi^m\|\ge d_p(0)$. Пусть $t\ge M+d_p(0)$. Тогда так как для любого $k:k=1,2,\ldots$ в силу замечания 1

$$d_p(\xi)=d_p(\xi-\xi_k+\xi_k)\le d_p(\xi_k)+\|\xi-\xi_k\|\le M+\frac{d_p(0)}{2},$$

при $\|\xi-\xi_k\|<\dfrac{d_p(0)}{2}$, то

$$S_{\frac{d_p(0)}{2}}(\xi^k):=\left\{\xi\in R^n:\|\xi-\xi^k\|<\frac{d_p(0)}{2}\right\}\subset\Phi_2(d_p,t),\forall k=1,2,\ldots$$

Т.к. для любых $k \neq l$

$$S_{\frac{d_p(0)}{2}}(\xi^k) \cap S_{\frac{d_p(0)}{2}}(\xi^l) = \varnothing,$$

то

$$\int\limits_{d_p(\xi)\le M+d_p(0)} d\xi \ge \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{S_{\frac{d_p(0)}{2}}(\xi^k)} d\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{S_{\frac{d_p(0)}{2}}(0)} d\xi = +\infty.$$

Следовательно, при $t \ge M + d_p(0)$

$$m(\Phi_2(d_p, t)) = +\infty,$$

откуда получаем, что $F_2(d_p) = +\infty.$ Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы. **Теорема 2 доказана.**

Теорема 3. Если для оператора $P(D)$ существуют числа $0 < c \le 1$ и $k > 0$ такие, что

$$1 + d_p(\xi) \ge k\|\xi\|^c, \ \forall \xi \in R^n, \tag{2.2}$$

то

$$F_2(d_p) \le \frac{n}{c}.$$

Доказательство. Пусть выполняется оценка (2.2). Тогда для любого $t > 0$

$$\Phi_2(d_p, t) \subseteq \{\xi \in R^n : k\|\xi\|^c \le t+1\}. \tag{2.3}$$

Из вложения (2.3) имеем, что

$$\int\limits_{d_p(\xi)\le t} d\xi \le \int\limits_{\|\xi\|^c \le \frac{t+1}{k}} d\xi. \tag{2.4}$$

В последнем интеграле произведем замену переменных $\xi = \left(\frac{t+1}{k}\right)^{\frac{1}{c}} \omega$.

Так как Якобиан этого преобразования равен $J(\omega) = \left(\frac{t+1}{k}\right)^{\frac{n}{c}}$, то из оценки (2.4) получим:

$$\int\limits_{d_p(\xi)\le t} d\xi \le \int\limits_{\|\xi\|^{\frac{1}{c}} \le \frac{t+1}{k}} d\xi = \int\limits_{\|\omega\|\le 1} \left(\frac{t+1}{k}\right)^{\frac{n}{c}} d\omega = \left(\frac{t+1}{k}\right)^{\frac{n}{c}} |S_n|. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в $F_2(d)$, получим

$$F_2(d)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln m(\Phi_2(d,t))}{\ln t}\le\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left|S_n\right|\left(\frac{t+1}{k}\right)^{\frac{n}{c}}}{\ln t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left|S_n\right|+\frac{n}{c}\ln\left(\frac{t+1}{k}\right)}{\ln t}=\frac{n}{c}$$

что и требовалось доказать. **Теорема 3 доказана.**

Теорема 4. Пусть $d(\xi)$ медленно меняющаяся весовая функция. Обозначим

$$F_3(d):=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln card(\Phi_3(d,t))}{\ln t},$$

где $\Phi_3(d,t):=\{\alpha\in Z^n : d(\alpha)\le t\}$. Тогда из существования одного из $F_2(d),\ F_3(d)$ следует существование второго и $F_2(d)=F_3(d)$.

Доказательство. Для любого $\alpha\in Z^n$ обозначим

$$I(\alpha):=\left\{\xi\in R^n : \left|\xi_i-\alpha_i\right|<\frac{1}{2},\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Очевидно, что $m(I(\alpha))=1$.

Зафиксируем $t>0.$ Тогда для всех $\alpha,\beta\in\Phi_3(d,t),\ \ \alpha\ne\beta$

$$I(\alpha)\cap I(\beta)=\varnothing$$

и

$$\Phi_2(d,t)\subset\bigcup_{\alpha\in\Phi_3(d,t)}I(\alpha).$$

$card(\Phi_3(d,t))$ представим в следующем виде:

$$card(\Phi_3(d,t))=\sum_{\alpha\in\Phi_3(d,t)}mes(I(\alpha))=mes\left(\bigcup_{\alpha\in\Phi_3(d,t)}I(\alpha)\right).\qquad(2.6)$$

Т.к. для любого $\xi\in I(\alpha)\quad \left|\xi_i-\alpha_i\right|<\frac{1}{2},\ i=\overline{1,n},$

то

$$\left\|\xi-\alpha\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-\alpha_i\right|^2}\le\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

В силу того, что $d(\xi)$ медленно меняющаяся функция, имеем

$$d(\xi)\le d(\alpha+\xi-\alpha)\le d(\alpha)+\left\|\xi-\alpha\right\|\le t+\frac{\sqrt{n}}{2},\ \xi\in\bigcup_{\alpha\in\Phi_3(d,t)}I(\alpha).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\bigcup_{\alpha\in\Phi_3(d,t)} I(\alpha)\subseteq\Phi_2\left(d,t+\frac{\sqrt{n}}{2}\right).$$

Отсюда и из (2.6) имеем, что

$$card(\Phi_3(d,t))\le mes(\Phi_2(d,t+\frac{\sqrt{n}}{2})). \qquad (2.7)$$

Пусть $t>\sqrt{n}$ и $\xi\in\Phi_2(d,t-\sqrt{n})$. Обозначим $\alpha_\xi:=([\xi_1],...,[\xi_n])$, где $[a]$ есть целая часть числа a. Тогда $\left|\xi_i-[\xi_i]\right|\le 1,\ i=\overline{1,n}$; следовательно,

$$\left\|\xi-\alpha_\xi\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i-[\xi_i]\right|^2}\le\sqrt{n}.$$

Из условия на функцию d имеем, что

$$d(\alpha_\xi)=d(\xi+\alpha_\xi-\xi)\le d(\xi)+\left\|\alpha_\xi-\xi\right\|\le t-\sqrt{n}+\sqrt{n}=t.$$

Следовательно,

$$\Phi_2(d,t-\sqrt{n})\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Phi_3(d,t)}\overline{I(\alpha)},$$

где $\overline{I(\alpha)}$ – замыкание множества $I(\alpha)$.

Из последнего вложения в силу (2.6) получаем, что при $t>\sqrt{n}$

$$mes(\Phi_2(d,t-\sqrt{n}))\le mes\left(\bigcup_{\alpha\in\Phi_3(d,t)} I(\alpha)\right)=\sum_{\alpha\in\Phi_3(d,t)} mes(I(\alpha))=card(\Phi_3(d,t)). \qquad (2.8)$$

Из неравенств (2.7) и (2.8) при $t>\sqrt{n}$ имеем

$$mes(\Phi_2(d,t-\sqrt{n}))\le card(\Phi_3(d,t))\le mes(\Phi_2(d,t+\frac{\sqrt{n}}{2})), \qquad (2.9)$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы 4. **Теорема 4 доказана.**

Следствие. Если $d(\xi)$ медленно меняющаяся весовая функция, для которой существует предел $F_2(d)$, то существует $F_1(d)$ и имеет место неравенство

$$F_1(d) \leq F_2(d).$$

Доказательство немедленно следует из вложения

$$\bigcup_{\alpha\in\Phi_2(d,t)} I(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Phi_3(d,t)} I(\alpha) \subseteq \Phi_2\left(d, t+\frac{\sqrt{n}}{2}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов В.П.* О поведении одного класса многочленов в бесконечности. Труды МИАН СССР. Т. 150, №4, 1965. СС.143–159.

2. *Gindikin S.G. and Volevich L.R.* The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations. Kluwer Acad. Publ. 1992. 265 p.

3. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.

4. *Pontrjagin L., Schnirelmann L.* Sur une propriètè mètrique de la dimension, Ann. Math. 1932, v. 33. PP. 156–162.

5. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I–II том. М.: Мир, 1986.

6. *Komura Y.* Die Nuklearität der Lösungsräume der hypoelliptischen Gleichungen, Funkcialaj Ekvacioj, 1966, B. 9. CC. 313–324.

7. *Маргарян В.Н., Казарян Г.Г.* Оценки снизу функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических операторов. Мат. сб. 1990, 181, №7. СС. 910–922.

8. *Маргарян В.Н.* Оценки снизу функциональной размерности пространства решений дифференциальных уравнений. Ер.: Изд-во НАН Арм. Т. 36, № 3, 2001. СС. 45–55.

9. *Маргарян В.Н.* Оценки сверху функциональной размерности пространства решений гипоэллиптических уравнений. Ер.: Изд-во НАН Арм. Т. 37, № 5, 2002. СС. 27–39.

SOME PROPERTIES OF SLOWLY VARYING WEIGHT FUNCTIONS

G. Melkumyan

ABSTRACT

This paper reviews slowly varying weight functions and defines some of their properties, furthermore the sufficient condition for hypoellipticity of a linear operator with constant coefficients is indicated.

Keywords: slowly increasing weight function, slowly varying weight function, functional dimension of space, hypoellipticity.

ԴԱՆԴԱՂ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԿՇՌԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Գ.Ս. Մելքումյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում դիտարկվել են դանդաղ փոփոխվող կշռային ֆունկցիաները և ձևակերպվել նրանց որոշ հատկություններ, ինչպես նաև ստացվել է հիպոէլիպտիկության բավարար պայման հաստատուն գործակիցներով $P(D)$ գծային դիֆերենցիալ օպերատորի համար:

Հիմնաբառեր՝ դանդաղ աճող կշռային ֆունկցիա, դանդաղ փոփոխվող կշռային ֆունկցիա, տարածության ֆունկցիոնալ չափ, հիպոէլիպտիկություն:

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЬЕЗОУПРУГОГО СЛОЯ

В.Г. Гараков

Институт механики НАН РА

garakov@yandex.com

АННОТАЦИЯ

В данной статье приводится решение задачи отражения электромагнитной волны от упругого слоя из материала, обладающего пьезоэлектрическим свойством гексагональной симметрии класса 6мм. В частном случае нормально подающей волны показано, что отраженная и преломленные волны не зависят от пьезоупругих свойств материала слоя. При косом падении волны установлена существенная зависимость амплитуды и фазы отраженный волны от коэффициента электромеханической связи.

Ключевые слова: отражение, пьезоэлектрический слой, электромагнитная волна.

1. Упругий слой из материала с пьезоэлектрическими свойствами класса 6мм в декартовой прямоугольной систем координат (x, y, z) занимает область $0 \le x \le h, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$. На слой из полупространства $x < 0$ падает поперечно–поляризованная плоская волна с компонентами вектора электромагнитного поля E_1, E_2 и компоненты вектора магнитного поля H_3. Здесь индексы 1,2,3 соответствуют направлениям координатных линий $x, y, z,$ соответственно, предполагается независимость волны от координаты z. Падающая волна приводит к возбуждению в пьезоупругом слое сдвиговых упругих колебаний. В

результате отражения и преломления электромагнитные волны будут зависеть от упругих свойств слоя.

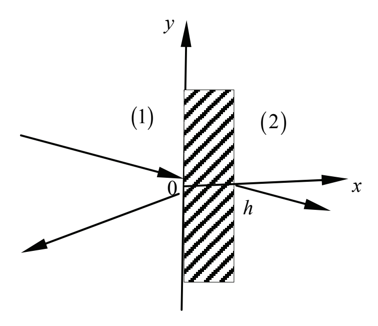


Рис. 1

В дальнейшем величины с верхними индексами (1) и (2) будут относиться к областям $x < 0$ и $x > h$, соответственно. Величины, относящиеся к области $\infty \le x \le h$, будут без верхнего индекса (Рис. 1).

Согласно приведенным выше ограничениям, уравнения электродинамики для областей (1) и (2) будут

$$\frac{\partial E_2^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial E_1^{(i)}}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_3^{(i)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3^{(i)}}{\partial y} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_1^{(i)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3^{(i)}}{\partial x} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_2^{(i)}}{\partial t} \qquad (i = 1,2) \quad (1.1)$$

Уравнение электроупругости для пьезослоя без приближения модели квазистационарности имеют вид [1]

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = -\frac{\partial B_3}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial y} = \frac{\partial D_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x} = -\frac{\partial D_2}{\partial t} \qquad (1.3)$$

Уравнения (1.2), (1.3) замыкаются следующими функциональными связями (материальными уравнениями)

$$\begin{gathered} \sigma_{13} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} - e_{15} E_1, \quad \sigma_{23} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - e_{15} E_2 \\ D_1 = -\varepsilon_1 E_1 + e_{15} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad D_2 = \varepsilon E_2 + e_{15} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad B_3 = \mu H_3 \end{gathered} \qquad (1.4)$$

Используя связи (1.4) для гармонических колебаний $(\exp i\omega t)$, уравнения (1.2) и (1.3) можно привести к автономным уравнениям относительно перемещения сдвига w и компоненты магнитного поля H_3 [2]

$$c_t^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad c_t^2 = c_{44}(1+\chi)/\rho, \ \chi = e_{15}^2/(\varepsilon c_{44}) \tag{1.5}$$

$$\Delta H_3 = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_3}{\partial t^2} \tag{1.6}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, χ – коэффициент электромеханической связи.

При решении задач на основе уравнений (1.5), (1.6) компоненты электрического поля E_1, E_2 определяются следующим образом

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{e_{15}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}; \quad \frac{\partial E_2}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{e_{15}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \tag{1.7}$$

На границах раздела сред требуется удовлетворить следующим условиям

$$E_2^{(1)} = E_2, \ H_3^{(1)} = H_3, \ \sigma_{13} = 0 \ \text{ при } x = 0 \tag{1.8}$$

$$E_2 = E_2^{(2)}, \ H_3 = H_3^{(2)}, \ \sigma_{13} = 0 \ \text{ при } x = h \tag{1.9}$$

2. Согласно системе уравнений (1.1), для падающей на границу $x = 0$ электромагнитной волны получаются известные выражения [3]

$$H_{3n}^{(1)} = A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

$$E_{2n}^{(1)} = \frac{k_1}{\varepsilon_0 \omega} A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \tag{2.1}$$

$$E_{1n}^{(1)} = \frac{k_2}{\varepsilon_0 \omega} A_1 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = k_1^2 + k_2^2 \ . \tag{2.2}$$

Выражение для волны, отраженной от границы $x=0$, следующие:

$$H_{30}^{(1)}=B_1\exp i\left(\omega t+k_1x-k_2y\right)$$
$$E_{20}^{(1)}=-\frac{k_1}{\varepsilon_0\omega}B_1\exp i\left(\omega t+k_1x-k_2y\right) \qquad (2.3)$$
$$E_{10}^{(1)}=\frac{k_2}{\varepsilon_0\omega}B_1\exp i\left(\omega t+k_1x-k_2y\right)$$

Решение уравнения (1.5) представляется в виде:

$$w=f\left(x\right)\exp i\left(\omega t-k_2y\right) \qquad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (1.5) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, общее решение которого есть:

$$f\left(x\right)=c_1\sin k_2\sqrt{\eta-1}x+c_2\cos k_2\sqrt{\eta-1}x\ , \qquad (2.5)$$

где приятно обозначение $\eta=\omega^2k_2^{-2}c_t^{-2}$. (2.6)

Аналогичное решение для уравнения (1.6) будет:

$$H_3=\left(c_3\sin k_2\sqrt{\theta\eta-1}x+c_4\cos k_2\sqrt{\theta\eta-1}x\right)\exp i\left(\omega t-k_2y\right) \qquad (2.7)$$

где $\theta=c_t^2/\left(\varepsilon\mu\right)$. (2.8)

Согласно (1.7) и с учетом (2.5) и (2.7) выражение для компонент электрического получаются в виде:

$$E_1=-\frac{k_2}{\varepsilon\omega}\Big[c_3\sin k_2\sqrt{\theta\eta-1}x+c_4\cos k_2\sqrt{\theta\eta-1}x+$$
$$+e_{15}\omega\sqrt{\eta-1}\left(c_1\sin k_2\sqrt{\eta-1}x-c_4\sin k_2\sqrt{\eta-1}x\right)\Big]\exp i\left(\omega t-k_2y\right)$$
$$E_2=\frac{ik_2}{\varepsilon\omega}\Big[\sqrt{\theta\eta-1}\left(c_3\cos k_2\sqrt{\theta\eta-1}x-c_4\sin k_2\sqrt{\theta\eta-1}x\right)+ \qquad (2.9)$$
$$+e_{15}\omega\left(c_1\sin k_2\sqrt{\eta-1}x+c_2\cos k_2\sqrt{\eta-1}x\right)\Big]\exp i\left(\omega t-k_2y\right)$$

Из уравнений (1.1) и в соответствии с выражениями (2.1) следует решение для преломленной электромагнитной волны в области $x > h$

$$H_3^{(2)} = A_2 \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right)$$

$$E_2^{(2)} = \frac{k_1}{\varepsilon_0 \omega} A_2 \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right) \qquad (2.10)$$

$$E_1^{(2)} = \frac{k_2}{\varepsilon_0 \omega} A_2 \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right)$$

3. Постоянные $B_1, C_1, C_2, C_3, C_4, A_2$, характеризующие амплитуды колебаний, должны быть определены удовлетворением граничным условиям:

$$H_3^{(1)} = H_3,\ E_2^{(1)} = E_2,\ \sigma_{13} = 0 \ \text{ при } \ x = 0 \qquad (3.1)$$

$$H_3 = E_3^{(2)},\ E_2 = E_2^{(2)},\ \sigma_{13} = 0 \ \text{ при } \ x = h \qquad (3.2)$$

Подстановка решений (2.1), (2.3),(2.5),(2.7),(2.9) и (2.10) с учетом

$$H_3^{(1)} = H_{3n}^{(1)} + H_{30}^{(1)},\ E_2^{(1)} = E_{2n}^{(1)} + E_{20}^{(1)} \qquad (3.3)$$

приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно искомых постоянных:

$$A_1 + B_1 = C_4$$

$$k_1 \varepsilon\left(A_1 - B_1\right) = ik_2\left(\sqrt{\theta\eta - 1} C_3 + e_{15} \omega C_2\right)$$

$$c_{44}\left(1 + \chi\right)\sqrt{\eta - 1} C_1 + \frac{e_{15}}{\varepsilon\omega} C_4 = 0$$

$$C_3 \sin k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h + C_4 \cos k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h = A_2 \exp\left(-ik_1 h\right)$$

$$\frac{ik_2}{\varepsilon\omega}\Big[\sqrt{\theta\eta - 1}\left(C_3 \cos k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h - C_4 \sin k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h\right) + \qquad (3.4)$$

$$+ e_{15}\omega\left(C_1 \sin k_2 \sqrt{\eta - 1} h + C_2 \cos k_2 \sqrt{\eta - 1} h\right)\Big] = \frac{k_1}{\varepsilon_0 \omega} \mathrm{A}_2 \exp\left(-ik_1 h\right)$$

$$c_{44}\left(1 + \chi\right)\sqrt{\eta - 1}\left(C_1 \cos k_2 \sqrt{\eta - 1} h - C_2 \sin k_2 \sqrt{\eta - 1} h\right) +$$

$$+ \frac{e_{15}}{\varepsilon\omega}\left(C_3 \sin k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h + C_4 \cos k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h\right) = 0$$

Из системы (3.4) постоянные C_2 и C_3 определяются следующим образом:

$$C_2 = -\frac{2A_1}{c_{44}\Delta}\left[\frac{ik_2\varepsilon_0 e_{15}}{\varepsilon^2 k_1\omega}\sqrt{\theta\eta-1}\psi_1\sin\beta + \left(\frac{ik_2}{\varepsilon}\sqrt{\theta\eta-1}\cos\beta - \frac{k_1}{\varepsilon_0}\sin\beta\right)\psi_2\right]$$
$$C_3 = -\frac{2A_1}{\Delta}\left[(1+\chi)\sqrt{\eta-1}\psi_1\sin\alpha + \frac{ik_2 e_{15}\omega}{\varepsilon c_{44}}\psi_2\cos\alpha\right] \quad (3.5)$$

В (3.5) использованы новые обозначения:

$$\alpha = k_2 h\sqrt{\eta-1}, \quad \beta = k_2 h\sqrt{\theta\eta-1}$$

$$\psi_1 = \frac{ik_2}{\varepsilon}\sqrt{\theta\eta-1}\sin\beta + \frac{k_1}{\varepsilon_0}\cos\beta + \frac{ik_2 e_{15}^2\omega}{\varepsilon^2}\frac{\sin\alpha}{\omega c_{44}(1+\chi)\sqrt{\eta-1}}$$
$$\psi_2 = \frac{e_{15}}{\varepsilon\omega}(\cos\beta - \cos\alpha) \quad (3.6)$$

$$\Delta = (1+\chi)\sqrt{\eta-1}\left(\frac{ik_2}{\varepsilon}\sqrt{\theta\eta-1}\cos\beta - \frac{k_1}{\varepsilon_0}\sin\beta\right)\sin\alpha +$$
$$+ik_2\chi\cos\alpha\sin\beta + \left[(1+\chi)\sqrt{\theta\eta-1}\sqrt{\eta-1}\sin\alpha + \chi\sin\beta\right]\frac{ik_2\varepsilon_0}{k_1}\psi_1 +$$
$$+\left[\left(\frac{ik_2}{\varepsilon}\sqrt{\theta\eta-1}\cos\beta - \frac{k_1}{\varepsilon_0}\sin\beta\right) - \frac{ik_2\varepsilon_0}{k_1\varepsilon}\sqrt{\theta\eta-1}\cos\alpha\right]\frac{ik_2 e_{15}\omega}{\varepsilon c_{44}}\psi_2 .$$

Остальные постоянные определяются через C_2, C_3

$$B_1 = A_1 - \frac{ik_2\varepsilon_0}{k_1\varepsilon}\left(\sqrt{\theta\eta-1}C_3 + e_{15}\omega C_2\right)$$
$$A_2 = \left[C_3\sin\beta + (A_1 + B_1)\cos\beta\right]\exp(ik_1 h) \quad (3.7)$$
$$C_1 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon\omega c_{44}(1+\chi)\sqrt{\eta-1}}(A_1 + B_1), \; C_4 = A_1 + B_1 .$$

Из (3.7) следует, что пьезоэффект влияет как на амплитуды отраженной и прошедшей электромагнитной волны, так и на фазу.

4. В частном случае нормально падающей волны $(k_2 = 0)$ получается, что пьезоэффект не влият на отраженную и преломленную электромагнитные волны [4]. Получается автономное уравнение, определяющее собственные колебания пьезоупругого слоя:

$$\sin\left(c_t^{-1}\omega h\right) = 0. \quad (4.1)$$

Для величины B_1, характеризующей отраженную электромагнитую волну, получается:

$$B_1 = \frac{\varepsilon_0 (1+i)\cos k_1 h + \varepsilon (1-i)\sin k_1 h}{\varepsilon_0 (1-i)\cos k_1 h - \varepsilon (1+i)\sin k_1 h} A_1 \ . \quad (4.2)$$

Представляет особый интерес случай, когда волна падает на слой под углом, но граница слоя $x = h$ заземлена, т.е. имеет место условие:

$$E_1 = 0 \text{ при } x = h \quad (4.3).$$

В этом случае первые три уравнения, необходимые для определения искомых постоянных B_1, C_1, C_2, C_3, C_4, из систем (3.4) остаются в силе. К ним присоединяются новые условия:

$$\begin{aligned} &C_1 \cos k_2 \sqrt{\eta - 1} h - C_2 \sin k_2 \sqrt{\eta - 1} h = 0 \\ &C_3 \cos k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h + C_4 \sin k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h = 0 \ . \end{aligned} \quad (4.4)$$

В рассматриваемом случае для амплитуды отраженной электромагнитной волны получается:

$$B_1 = \frac{k_1 \varepsilon + i k_2 \varepsilon_0 R}{k_1 \varepsilon - i k_2 \varepsilon_0 R} A_1 \ , \quad (4.5)$$

где

$$R = \sqrt{\theta\eta - 1}\,\mathrm{ctg} k_2 \sqrt{\theta\eta - 1} h + \frac{\chi\,\mathrm{ctg} k_2 \sqrt{\eta - 1} h}{(1+\chi)\sqrt{\eta - 1}} \ . \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что амплитуда и фаза отраженной электромагнитной волны зависят от коэффициента электромеханической связи χ. Эта зависимость будет тем существеннее, чем параметр частоты η ближе к единице.

Заключение

При исследовании задачи отражения электромагнитной волны от упругого слоя, обладающего пьезоэлектрическими свойствами получены, выражения для отраженной преломленной электромагнитной волны. Показано, что в случае нормально падающей волны пьезоэффект не оказывает влияния. При косом падении влияние пьезоэффекта существенно зависит от диапазона частоты падающей электромагнитной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакирев М.К., Гилинский И.А.* Волны в пьезо-кристаллах. Новосибирск: Наука 1982, 239 с.
2. *Белубекян М.В.* Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексогональной симметрии // «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ер.: Институт механики НАН РА, 2008. СС.125–130.
3. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973, 343 с.
4. *Baghdasaryan A., Belubekyan M.* On the Problem of Reflection of Shear Wave from a Boundary of Piezoelectric Media of class 6mm Proc. Of the 3th Intern Congress on Thermo stresses. University of Illinois. USA. 2009, v.1. PP. 183–186.

REFLEXTION OF ELECTROMAGNETIC WAVE FROM PIEZOELASTIC LAYER

V. Garakov

ABSTRACT

Reflection of electromagnetic wave from elastic layer (which is a substance having piezoelectric property 6mm class hexagonal symmetry) is considered.

Particularly, for normal falling wave, it is shown that both reflected and refracted waves do not depend from piezoelectric features of the layer material.

In case of oblique angle falling wave the amplitude and phase of the reflected wave significantly depend on electromechanically coupling factor.

Keywords: reflection, piezoelectric layer, electromagnetic wave.

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՈՒՄԸ ՊԻԵԶՈԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻՑ

Վ.Գ. Գարակով

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիտարկվում է էլեկտրամագնիսական ալիքների անդրադարձումը առաձգա -կան շերտից, որը իրենից ներկայացնում է նյութ օժտված պիեզոէլեկտրական հատկություններով 6mm դասի հեքսոգոնալսիմետրիայի: Մասնավոր դեպ- քում, նորմալ ընկնող ալիքի համար, ցույց է տրվում, որ անդրադարձող և բեկված ալիքները կախված չեն նյութի շերտի պիեզոառաձգական հատկություններից: Իսկերբալիքըընկնում է շեղանկյան տակ, ապա անդրադարձող ալիքի ամպլիտուդը և ֆազը էական կապված են էլեկտրամեխանիկական կապի գործակցից:

Հիմնաբառեր՝ անդրադարձում,պիեզոէլեկտրիկշերտ,էլեկտրամագնիսական ալիք:

УДК 517.9

ON THE THEOREM OF AMBARZUMIAN FOR DIRAC SYSTEM

T.N. Harutyunyan

Yerevan State University

hartigr@yahoo.co.uk

SUMMARY

We prove that in general case the analogue of famous theorem of Ambarzumian for canonical Dirac system is not true. In the same time we describe the particular cases, when some analogues are true.
Keywords: the inverse problem, theorem of Ambarzumian, Dirac canonical system.

Let us denote by $L(p,q,\alpha,\beta) = L(\Omega,\alpha,\beta)$ the boundary value problem for the canonical Dirac system ([1], [2])

$$\ell y \equiv \left\{B\frac{d}{dx} + \Omega(x)\right\} y = \lambda y, \qquad 0 < x < \pi, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \qquad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{2}$$

$$y_1(\pi)\cos\beta + y_2(\pi)\sin\beta = 0, \qquad \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{3}$$

where $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ and the matrix-function

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \tag{4}$$

usually called a potential. About p and q we assume that $p, q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, i.e. they are real, summable on $[0,\pi]$ functions. By the same $L(\Omega,\alpha,\beta)$ we denoted the selfadjoint operator, generated by problem (1)-(3) in Hilbert space of two-component vector-functions $L^2([0,\pi];\ \mathbb{C}^2)$ (see [3]).

It is well known ([4], [5], [6]) that the spectra of operator $L(\Omega, \alpha, \beta)$ is discrete and consists of real, simple eigenvalues λ_n $(n \in \mathbb{Z})$,

$$\dots \lambda_{-n} < \lambda_{-n+1} < \dots < \lambda_0 \le 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

which we denote also by $\lambda_n = \lambda_n(\Omega, \alpha, \beta) = \lambda_n(p, q, \alpha, \beta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, emphasizing the dependence λ_n on p, q, α, β, and which have the asymptotics

$$\lambda_n(p, q, \alpha, \beta) = n + \frac{\beta - \alpha}{\pi} + r_n, \tag{5}$$

where $r_n = r_n(p, q, \alpha, \beta) = o(1)$, when $n \to \pm\infty$, uniformly by $\alpha, \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ and p, q from bounded subsets of $L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$.

In particular, it is also known that

$$\lambda_n(0, 0, \alpha, \beta) = n + \frac{\beta - \alpha}{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{6}$$

Inverse spectral problem for operator $L(\Omega, \alpha, \beta)$ is to reconstruct the potential and parameters α and β from spectral data. The spectra of an operator is its spectral data. There are also other spectral data (see [7]-[13]).

If denote by $\mu_n(q, \alpha, \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, the eigenvalues of Sturm-Liouville problem

$$-y'' + q(x)y = \mu y, \qquad x \in (0, \pi), q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi], \mu \in \mathbb{C},$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \qquad \alpha \in (0, \pi],$$

$$y(\pi) \cos \beta + y'(\pi) \sin \beta = 0, \qquad \beta \in [0, \pi),$$

then the famous Ambarzumian theorem asserts:

Theorem 1 ([14]). If

$$\mu_n\left(q, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = n^2, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

then $q(x) = 0$ almost everywhere (a.e.) on $[0, \pi]$.

Is there an analogue of Theorem of Ambarzumian for problem $L(p, q, \alpha, \beta)$? The same: are there α_0 and β_0 such that if

$$\lambda_n(p, q, \alpha_0, \beta_0) = \lambda_n(0, 0, \alpha_0, \beta_0) = n + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

then $p(x) = q(x) = 0$ a.e. on $[0, \pi]$?

The answer is negative! More presise, there is infinite set of canonical potentials of the form (4), for which the set of eigenvalues $\{\lambda_n(p, q, \alpha_0, \beta_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ coinside with the set (7). This infinite set of isospectral potentials described in paper [15].

Example 1. Let

$$\Omega_{m,t}(x) = \frac{\pi(e^t - 1)}{\pi + (e^t - 1)x}\begin{pmatrix} -\sin 2mx & \cos 2mx \\ \cos 2mx & \sin 2mx \end{pmatrix} \tag{8}$$

where t is an arbitrary real parameter ($t \in \mathbb{R}$) and m is an arbitrary integer ($m \in \mathbb{Z}$). Then

$$\lambda_n(\Omega_{m,t}, 0, 0) = \lambda_n(0, 0, 0) = n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

it est there are infinite (continuum) canonical potintial matrix, differ from zero matrix, which have the same spectra as zero potential.

This example follows from the results of paper [15], where was described all possible canonical Dirac operators, which have the same spectra (isospectral) as an fixed Dirac operator.

But if we take additional conditions, then it is possible to find the analogues of Ambarzumian theorem. For example in paper [16] there is such a theorem:

Theorem 2 ([16]). Let for potential matrix Ω of the form (4) satisfied the conditions:

$$\lambda_n(\Omega, 0, 0) = \lambda_n(0, 0, 0) = n \text{ for all } n \in \mathbb{Z}$$

and

$$q(0) = q(\pi). \tag{9}$$

Then $\Omega(x) = 0$ a.e. on $[0, \pi]$.

If we compare this result with example 1, we see that condition (9) require that $e^t - 1 = 0$ i.e. $t = 0$. That means that additional condition (9) convert the infinite set of isospectral potential (8) to unique zero potential.

In paper [17] was described many additional conditions when the inverse problems for Dirac canonical operators can be solved by less spectral data, than it required in general case. In particular, in [17] formulated such analogues of theorem of Ambarzumian.

Theorem 3 ([17]).

1) If $\lambda_n(0,q,\alpha,0) = n - \frac{\alpha}{\pi}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ and some $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, then $q(x) = 0$ a.e. on $[0,\pi]$.
2) If $\lambda_n\left(p,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = n + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{\pi}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ and some $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, then $\mathrm{p}(x) = 0$ a.e. on $[0,\pi]$.

There are also the analogues of theorem of Ambarzumian for non canonical Dirac operators. In paper [18] was considered the eigenvalue problem

$$\left\{B\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} V(x)+m & 0 \\ 0 & V(x)-m \end{pmatrix}\right\} y = \lambda y, \qquad x \in (0,\pi), \tag{10}$$

$$y_1(0) = y_1(\pi) = 0. \tag{11}$$

In case $V(x) \equiv 0$ we can count the eigenvalues (and eigenfunctions) of (10)-(11):

$$\lambda_0 = -m, \qquad \lambda_k = \sqrt{m^2+k^2}, \qquad \lambda_{-k} = -\sqrt{m^2+k^2}, \qquad k = 1,2,\dots \tag{12}$$

In paper proved the following

Theorem 4 ([18]). Let $0 < m \leq \frac{1}{2}$ and $V \in C\,[0,\pi]$.

Suppose that (10) and (11) produce the same spectrum as $V(x) \equiv 0$, i.e. that the eigenvalues are $-m$ and $\pm\sqrt{m^2+k^2}$, $k = 1,2,\dots$. Then $V(x) \equiv 0$ on $[0,\pi]$.

This result of Horvath M. was generalized by Marton Kiss in [19] for n-dimentional Dirac operator of (10) form.

Acknowledgment. This work was supported by the RA MES State Committee of Science, in the frames of the research project № 15T-1A392.

REFERENCES

1. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, М., 1988.
2. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их Приложения, Киев, 1977.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 1969.
4. *Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т.* Определение системы дифференциальных уравненийДирака по двум спектрам // Труды летней школы по спектральной теории операторов..., Баку, Элм, СС. 46–71, 1975.
5. *Арутюнян Т.Н., Азизян Э.О.* О собственных значениях краевой задачи для канонической системы Дирака, Математика в высшей школе (Ереван) т. II, N4, 2006, 45–54.
6. *Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problem for Dirac operators with summable potential. Rus. J. of Math. Physics, 2005, Vol. 12, N4, PP. 406–423.
7. *Borg G.* Eine Umkerhung der Sturm-Liouvillsche Eigenwertaufgabe, Acta Math.,Vol. 78, N 1, PP. 1–96, 1946.
8. *Марченко В.А.* Некоторые вопросы теории дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды ММО, т. I, СС. 327–420, 1952.
9. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Определение дифференциального уравнения по егоспектральной функции. Известия АН СССР (сер. матем.) т. 15, 1951, СС. 309–365.
10. *Isaacson E., Trubowitz E.* The inverse Sturm-Liouville problem I. Comm. Pure Appl.Math. 1983. V. 36. PP. 767–783.
11. *McLaughlin J.R., Rundell W.* A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem. J. Math. Phys., Vol. 28, N7, 1984, PP. 1471–1472.
12. *McLaughlin J.R.* Inverse Spectral Theory using Nodal Points as a Data – A UniquenessResult, Jour. of Diff. Equations, vol. 73, N2, 1988, PP. 354–362.
13. *Harutyunyan T.N.* On a uniqueness theorem in the inverse Sturm-Liouville problem, Математички весник (Белград), v.61, N2 (2009), PP. 139–147.
14. *Ambartzumian V.A.* Ueber eine Frage der Eigenwerttheorie. Z. Physik 53, 1929, PP. 690–695.

15. *Арутюнян Т.Н.* Изоспектральные операторы Дирака, Известия НАН Армении, Матем., Т.29, N2, 1994, 3–14.

16. *Chuan-Fu Yang and Zhen-You Huang*. Inverse spectral problem for *2m*-dimentional canonical Dirac operators. Inverse Problems 23 (2007), PP. 2565–2574.

17. *Арутюнян Т.Н.* К обратной задаче для канонической системы Дирака, Известия НАН Армении "Математика", т. 41, N1, 2006, 5–14.

18. *Horvath M.* On atheorem of Ambarzumian. Proc. R. Soc. Edinb. A131, 2001, PP. 899–907.

19. *Marton Kiss.* An *n*-dimentional Ambarzumian type theorem for Dirac operators. Inverse Problems 20 (2004), PP. 1593–1597.

О ТЕОРЕМЕ АМБАРЦУМЯНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Т.Н. Арутюнян

АННОТАЦИЯ

Мы доказываем что в общем случае для системы Дирака известная теорема Амбарцумяна не имеет места. В тоже время мы описываем частные случаи, для которых имеют место аналоги теоремы Амбарцумяна.

Ключевые слова: обратная задача, теорема Амбарцумяна, каноническая система Дирака.

ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԱՍԻՆ ԴԻՐԱԿԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Տ.Ն. Հարությունյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Մենք ապացուցում ենք որ ընդհանուր դեպքում Դիրակի համակարգի համար Համբարձումյանի հայտնի թեորեմը տեղի չունի: Միաժամանակ մենք նկարագրում ենք մասնավոր դեպքեր, որոնց համար տեղի ունեն Համբարձումյանի թեորեմի անալոգները (նմանակները):

Հիմնաբառեր՝ հակադարձ խնդիր, Համբարձումյանի թեորեմ, Դիրակի կանոնական համակարգ:

Ф И З И К А

УДК 621.315

ОПТИЧЕСКИЕ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НАНОМЕТРИЧЕСКИХ СЛОЕВ ОКСИДА ИНДИЯ-ОЛОВА, ОСАЖДЕННЫЕ МЕТОДОМ МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ

Л.А. Ахоян

Российско-Армянский университет

hakhlev@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Данная научная статья посвящена изучению влияния вакуумного термоотжига наноразмерных пленок оксида индия-олова (ITO) на их оптические, морфологические и электрические характеристики. Пленки ITO были осаждены методом магнетронного распыления при постоянном токе (DC magnetron sputtering) при температуре подложки 175^{0}C. После процесса осаждения пленки ITO подверглись вакуумной термообработке при температурах 250^{0}C, 325^{0}C и 400^{0}C в течение 20 минут при давлении 0,4 Па. Измерения спектров пропускания и отражения показали, что полученные пленки ITO имеют высокую прозрачность (в среднем 82%) в видимом диапазоне длин волн. Электрические измерения показали, что вакуумная термообработка приводит к значительному, почти на порядок, снижению удельного сопротивления от $1{,}3\cdot10^{-3}$ до $1{,}8\cdot10^{-4}$ ом·см. АСМ исследования морфологии поверхности слоев ITO показали, что пленки, осажденные при температуре подложки 175^{0}C с последующим термоотжигом при 325^{0}C проявляют наиболее высокие показатели пропускания и имеют

близкое к металлическому значение (2,5 x 10^{-4} Ом · см) удельного сопротивления.

Ключевые слова: оксид индия-олова (ITO), магнетронное распыление, тонкие пленки, вакуумный термоотжиг.

Введение

На сегодняшний день одним из самых важных вопросов для тонкопленочных солнечных элементов (СЭ) таких, как a-Si: H, CIGS и CdTe, является повышение эффективности поглощения падающего на него солнечного излучения за счет уменьшения потерь в небазовых слоях [1, 2]. Оксид индия-олова (англ. Indium Tin Oxide или сокращённо ITO) – это сильно легированное полупроводниковое соединение с n-типом проводимости, имеет хорошую электропроводность и большую (около 4эВ) ширину запрещенной зоны [3], что обеспечивает его высокую прозрачность в видимом диапазоне [4] и используется не только как антиотражающее покрытие, но и в качестве электродов для СЭ.

При создании полупроводниковых приборных структур предпочтительными являются низкотемпературные методы осаждения пленок ITO [5], поскольку высокая температура и большая мощность распыления приводят к ухудшению границы гетероперехода и самой базовой структуры СЭ из-за взаимной диффузии между соседними слоями. Несмотря на такой важный фактор, в большинстве работ тонкие пленки ITO были осаждены либо при относительно более высоких температурах подложки и мощностях распылительной установки, либо при комнатной температуре с последующим термоотжигом при более высоких температурах [6–9].

В данной работе для осаждения пленок ITO использовался метод магнетронного распыления при постоянном токе (англ. DC magnetron sputtering) с рассеянием вторичных электронов, предотвращающий дополнительный (неконтролируемый) нагрев подложки в процессе распыления.

Пленки ITO осаждались при температуре подложки 175^0C и мощности магнетронного источника 30 Вт.

Целью работы было исследование влияния послеростового вакуумного термоотжига на оптические, электрические и морфологичес-

кие характеристики полученных пленок ITO. Термоотжиг проводился в вакууме при давлении 0.4 Па и при температурах 250^0C, 325^0C и 400^0C в течение 20 мин.

1. Методика эксперимента

Нано-размерные пленки ITO были изготовлены методом DC магнетронного распыления на установке Nanomaster-3500. В качестве подложек для осаждения слоев использовались очищенные фотопластины толщиной 1 мм, вырезанные в виде шайбы диаметром 20 мм. Непосредственно перед процессом распыления подложки тщательно промывались с помощью поверхностно-активных веществ (ПАВ) в ультразвуковой ванне, затем несколько раз промывались в дистиллированной воде, чтобы полностью удалить следы ПАВ-а. После этого подложки подвергались очистке с помощью этанола в ультразвуковой ванне, а затем высушивались продувкой сухим воздухом.

Для распыления слоев ITO в качестве мишени использовались прессованные керамические таблетки оксида олова-индия состава (In_2O_3 : SnO_2 = 90 : 10 вес.) высокой чистоты (99.999%). Диаметр таблетки составлял 5 см. Расстояние между мишенью и подложкой составило 10 см. Значение рабочего вакуума составило 0.4 Па, а скорость потока аргона выдерживалась при постоянном значении 10 кубических сантиметров в минуту (англ. sccm – standard cubic centimeter per minute) с помощью массового расходомера. Нами использовался аргон сверхвысокой чистоты Ar (99,999%). Мощность магнетронного источника составляла 30 Вт, а время распыления составляло 10 мин.

Распыление всех пленок ITO проводилось при температуре подложки 175^0C с последующим термоотжигом в вакууме при температурах 250^0C, 325^0C и 400^0C в течение 20 мин.

Морфология и шероховатость поверхности пленок ITO исследовались атомно-силовым микроскопом (АСМ) типа Solver NEXT (компании NT-MDT Inc.) в полуконтактном режиме. Измерения спектров пропускания и отражения пленок ITO проводились в диапазоне длин волн 400–1000 нм с использованием двухлучевого спектрофотометра Filmetrics F20.

Электрические измерения проводились с помощью четырех-зондового метода на стандартной установке ИУС-3.

2. Оптические характеристики

На Рис.1 показаны спектры пропускания пленок ITO, полученные методом магнетронного распыления при температуре подложки 175^{0}С с последующим термоотжигом в вакууме при давлении 0.4 Па и при температурах 250^{0}С, 325^{0}С и 400^{0}С в течение 20 мин. При более высоких температурах термоотжига, начиная с температуры 325^{0}С и выше, наблюдаются изменения спектров пропускания. Коэффициент пропускания меняется в пределах 73–94 % в диапазоне длин волн 400–1000 нм. Все пленки ITO проявляют высокую оптическую прозрачность (в среднем 82%) в видимом диапазоне, играющую важную роль при их использовании как в качестве антиотражающего покрытия, так и в качестве металлических контактов для СЭ. Однако следует отметить, что термообработка приводит к смещению спектра пропускания в сторону коротких длин волн, а также к увеличению среднего значения пропускания, что связано с улучшением кристалличности ITO, что коррелирует с результатами АСМ исследований.

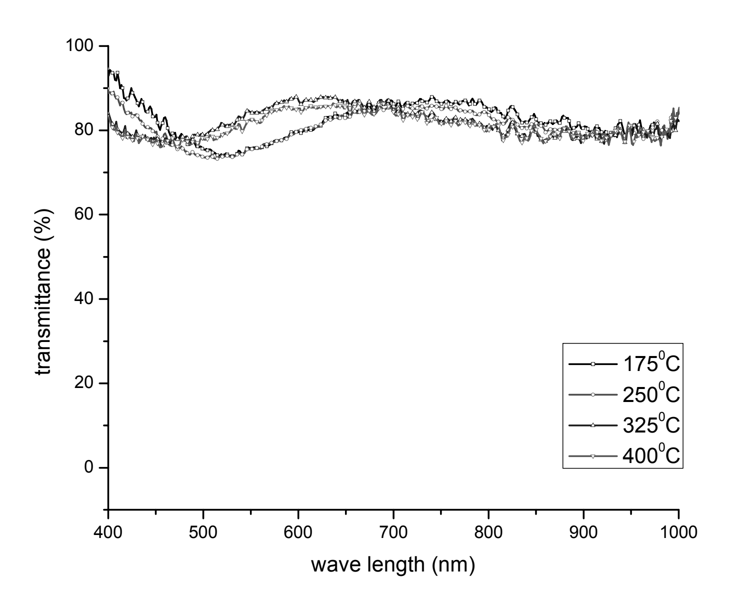


Рис. 1. Спектры пропускания пленок ITO, распыленных при температуре подложки 175^{0}С с последующим термоотжигом в вакууме при 250^{0}С, 325^{0}С и 400^{0}С.

3. Электрические свойства

Влияние температуры вакуумной термообработки на удельное сопротивление пленок ITO измерялось с помощью четырех-зондового метода. В таблице 1 приведены электрические свойства тонких пленок ITO, осажденные при температуре подложки 175^{0}С с последующим термоотжигом в вакууме при температурах 250^{0}С, 325^{0}С и 400^{0}С. Увеличение температуры термоотжига приводит к существенному, почти на порядок, уменьшению удельного сопротивления от 14 x 10^{-4} до 1,8 x 10^{-4} Ом·см.

Таблица 1. Электрические и оптические свойства тонких пленок ITO, осажденные при температуре подложки 175^{0}С с последующим термоотжигом в вакууме.

Температура термоотжига (^{0}С)	Средний коэффициент пропускания (%)	Удельное сопротивление (Ом · см)
175	82,39	1,3 x 10^{-3}
250	82,42	1,4 x 10^{-3}
325	82,44	2,5 x 10^{-4}
400	81,98	1,8 x 10^{-4}

4. Морфологические свойства

На Рис.2 показаны типичные 2мкм x 2мкм АСМ изображения пленок ITO, осажденные методом DC магнетронного распыления на стеклянные подложки при температуре 175^{0}С, а на Рис. 3 показаны изменения морфологии поверхности того же слоя ITO после термоотжига в вакууме при температуре 325^{0}С. Для получения статистических данных были исследованы несколько АСМ изображения различных участков поверхности каждого образца. Установлено, что наибольший размер зерен (со средним значением 58 нм) наблюдается для пленок ITO, которые подвергались термообработке при температуре 325^{0}С. Этим можно объяснить и наблюдаемую более высокую оптическую прозрачность. Дальнейшее увеличение температуры термоотжига приводит к уменьшению среднего размера зерен (со средним значением

40 нм, Рис.4), что может быть связано с потерей кислорода в процессе термообработки.

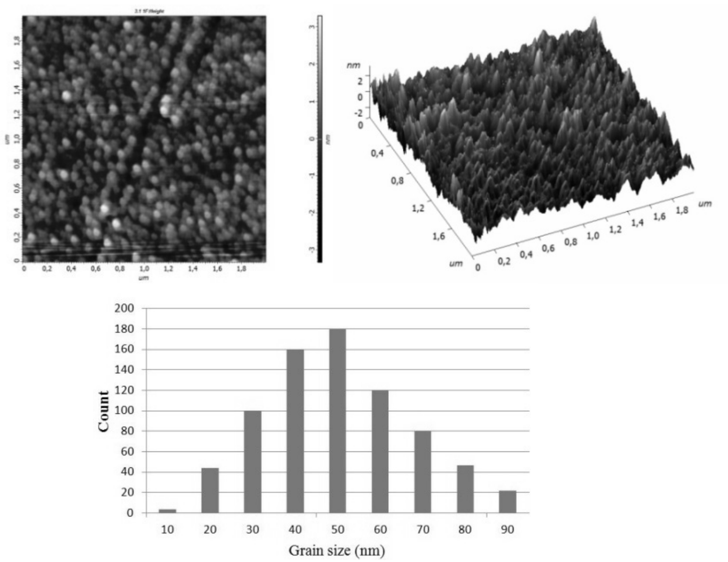


Рис.2. Типичные АСМ изображения и распределение размера зерен пленок ITO, осажденные при 175^{0}С температуре подложки.

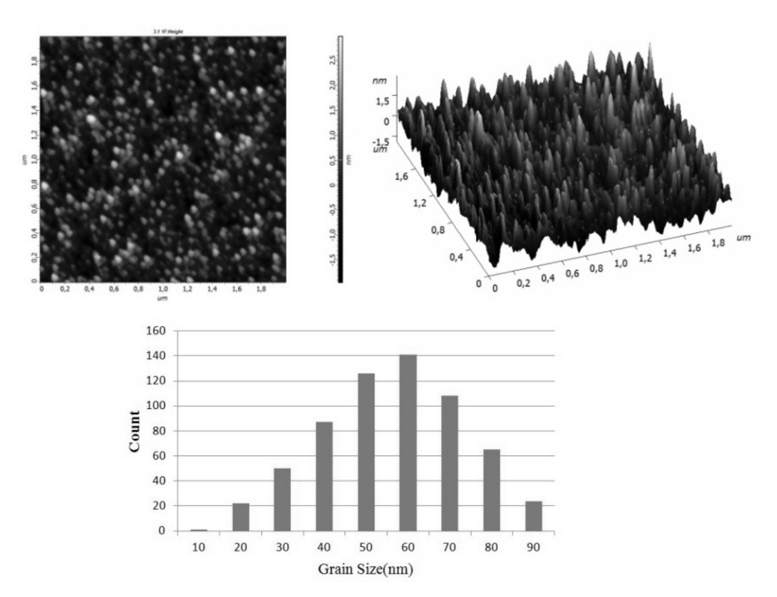


Рис.3. Типичные АСМ изображения и распределение размера зерен пленок ITO, осажденные при 175^{0}С температуре подложки с последующим термоотжигом при 325^{0}С.

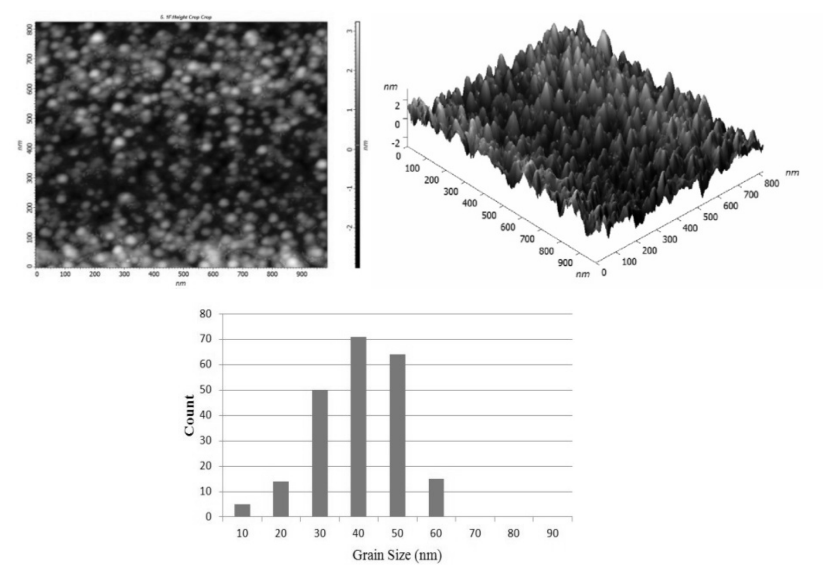


Рис.4. Типичные АСМ изображения и распределение размера зерен пленок ITO, осажденные при 175^0C температуре подложки с последующим термоотжигом при 400^0C.

5. Заключение

Отработана методика получения пленок ITO методом магнетронного DC распыления из мишени ITO в атмосфере чистого Ar (без подачи O_2). Исследовано влияние последующего (после процесса осаждения) вакуумного термоотжига на спектры пропускания, электропроводность и морфологию зернистости пленок. Показано, что термоотжиг в вакууме при давлении 0,4 Па в диапазоне 325^0C–400^0C приводит к увеличению среднего значения пропускания от 82,39% до 82,44% и почти на порядок к уменьшению удельного сопротивления (от $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ до $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ ом·см). Повышение температуры термоотжига (свыше 350^0C) приводит к незначительному ухудшению пропускания и уменьшению зернистости структуры.

Нами установлено, что высоких значений пропускания и малых значений удельного сопротивления (близких к металлическому) можно достичь не только путем повышения температуры подложки в процессе осаждения и больших значений мощности магнетрона, а также путем осаждения при низких температурах подложки и последующего

кратковременного низкотемпературного термоотжига в вакууме, не приводящих к ухудшению границы гетероперехода и самой базовой структуры СЭ, играющих важную роль для повышения эффективности СЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chopra K.L., Major S., Pandya D.K.* Transparent conductors – a status review. Thin Solid Films, 1983, 102: 1.
2. *Miro Z.* Thin film solar cells: fabrication, characterization and applications. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.
3. *Salehi A.* The effects of deposition rate and substrate temperature of ITO thin films on electrical and optical properties. Thin Solid Films, 1998, 328: 72.
4. *Kim H., Gilmore C.M., Pique A., et al*. Electrical, optical, and struc-tural properties of indium-tin-oxide thin films for organic light-emitting devices. J Appl Phys, 1999, 86: 6451.
5. *Romeo A., Terheggen M., Abou-Ras D.* Development of thin-film Cu(In,Ga)Se2 and CdTe solar cells. Progress in Photovoltaics: Research and Applications, 2004, 12: 93.
6. *Bender M., Seelig W., Daube C., et al*. Dependence of oxygen flow on optical and electrical properties of DC-magnetron sputtered ITO films. Thin Solid Films, 1998, 3326: 72.
7. *Hu Y.L., Diao X.G., Wang C., et al*. Effects of heat treatment on properties of ITO films prepared by RF magnetron sputtering. Vacuum, 2004, 75: 183.
8. *Teixeira V., Cui H.N., Meng L.J., et al*. Amorphous ITO thin films prepared by DC sputtering for electro chromic applications. Thin Solid Films, 2002, 420: 70.
9. *Kim S.S., Choi S.Y., Park C.G., et al*. Transparent conductive ITO thin films through the sol–gel process using metal salts. Thin Solid Films, 1999, 347: 155.

OPTICAL, ELECTRICAL AND MORPHOLOGICAL PROPERTIES OF ITO NANOMETRIC LAYERS DEPOSITED BY DC MAGNETRON SPUTTERING

L. Hakhoyan

ABSTRACT

The work is devoted to the effect of vacuum thermal annealing of Indium tin Oxide (ITO) nanometric films on their optical, morphological and electrical characteristics. ITO films were deposited by method of DC magnetron sputtering at substrate temperature of 175^0C. After deposition the ITO films were subjected to heat treatment at temperatures of 250^0C, 325^0C and 400^0C for 20 minutes at a pressure of 0.4 Pa. Transmittance and reflectance spectra showed that the ITO films has high transparency (82% on average) in the visible spectrum. The electrical measurements showed that the vacuum heat treatment leads to a significant (almost an order of magnitude) decrease in resistivity from $1,3 \cdot 10^{-3}$ up to $1,8 \cdot 10^{-4}$ ohm • cm. AFM studies of ITO layers surface morphology revealed that the films deposited at substrate temperature of 175^0C with post-deposition thermal annealing at 325^0C exhibit the highest transmittance and has the resistivity of $2,5 \times 10^{-4}$ ohm · cm close to the value of resistivity of metals.

Keywords: Indium Tin Oxide (ITO), magnetron sputtering, thin films, vacuum thermal annealing.

ՄԱԳՆԵՏՐՈՆԱՅԻՆ ՓՈՇԵՑՐՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ ՍՏԱՑՎԱԾ ՆԱՆՈՉԱՓԱՅԻՆ ԻՆԴԻՈՒՄԻ-ՕԼՈՎԻ ՕՔՍԻԴԻ ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ, ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ և ՄՈՐՖՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Լ.Ա. Հախոյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքը նվիրված է վակուումային ջերմամշակման ազդեցության ուսումնասիրմանը նանոչափային ինդիումի-օլովի օքսիդի (ITO) օպտիկական, էլեկտրական և մորֆոլոգիական հատկությունների վրա: ITO բարակ թաղանթները ստացվել են տակդիրների 175^0C ջերմաստիճանային պայմանում մագնետրոնային

փոշեցրման եղանակով ըստ հաստատուն հոսանքի (DC magnetron sputtering): Նստեցումից հետո թաղանթները ենթարկվել են 20 րոպե տևողությամբ վակուումային ջերմամշակման 250⁰C, 325⁰C և 400⁰C ջերմաստիճանային և 0,4 Պա ճնշման պայմաններում: Օպտիկական չափումները վկայում են այն մասին, որ ստացված ITO թաղանթները ունեն մեծ թափանցելիություն (82% միջին արժեքով) տեսանելի տիրույթում: Էլեկտրական հետազոտությունները ցույց են տվել, որ վակուումային ջերմամշակումը բերում է տեսակարար դիմադրության նվազմանը՝ գրեթե մեկ կարգով ($1{,}3\cdot10^{-3}$ - ից մինչև $1{,}8\cdot10^{-4}$ Օմ·սմ): Ատոմա-ուժային մանրադիտակով (AFM) կատարված հետազոտությունները վկայում են այն մասին, որ տակդիրի 175⁰C ջերմաստիճանային պայմանում ստացված և 325⁰C ջերմաստիճանում ջերմամշակման ենթարկված ITO թաղանթները ունեն ամենամեծ թողունակության գործակիցը և տեսակարար դիմադրությունը՝ $2{,}5 \times 10^{-4}$ Օմ·սմ արժեքով, որը մոտ է մետաղների տեսակարար դիմադրությանը:

Հիմնաբառեր՝ ինդիում-օլովի օքսիդ (ITO), մագնետրոնային փոշեցրում, բարակ թաղանթներ, վակուումային ջերմամշակում:

УДК 621.315

КРИТИЧЕСКИЙ РАДИУС ПОЛНОГО ОБЕДНЕНИЯ НАНОПРОВОЛОКИ ИЗ АРСЕНИДА ГАЛЛИЯ

В.А. Хачатрян[1]

Российско-Армянский Университет

vars.khachatryan1990@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В работе представлена элементарная аналитическая модель для оценки критического радиуса полного истощения в полупроводниковых нанопроволоках из арсенида галлия. Истощение полупроводника имеет место за счет захвата носителей заряда на поверхностные центры, вследствие чего наблюдается изгиб зон. Приведенная модель описывает зависимость критического радиуса от уровня легирования и параметров поверхностных состояний, что позволяет оценить проводящие свойства нанопроволок, лимитированные, в частности, поверхностными эффектами.

Ключевые слова: полупроводник, нанопроволоки, критический радиус, полное истощение.

1. Введение

Среди других наноструктур, полупроводниковые нанопроволоки (НП) с диаметрами от 10 до 100 нм и довольно большим аспектным отношением (радиус/длина), порядка 10^2, даже при отсутствии квантоазмерных эффектов, возможно использовать в качестве различных фотоэлектрических устройств, в частности, для фоточувствительных элементов, высоко интегрированных оптоэлектронных устройств [1], а также солнечных элементов третьего поколения [2]. Фотодетекторы на основе НП обладают высокой светочувствительностью по сравнению с их объемными или тонкопленочными аналогами благодаря их большому объему и соотношению малых размеров, сравнимых с диффузионной длиной носителей заряда [3,4].

Благодаря большему отношению поверхности к объему, НП содержат чрезвычайно высокую плотность поверхностных состояний, что приводит к нахождению уровня Ферми вблизи середины запрещенной зоны. В связи с обменом электронов между поверхностью и объемом и их захватом на поверхностные состояния в НП начинает образовываться область полного истощения с шириной порядка диаметра НП [5], которая имеет сильное влияние на электрические и фотоэлектрические характеристики НП и, как следствие, на различные устройства на их основе. Контроль толщины обедненного слоя имеет важное значение для функционирования устройств НП в качестве полевых транзисторов [6], фотопроводящих оптических детекторов [7] и солнечных элементов [8].

В дальнейшем мы будем считать, что радиус R нанопроволоки больше, чем длина волны де Бройля, следовательно, квантоворазмерные эффекты не учтены в расчетах.

2. Изгиб зон и критический радиус

В работе рассматривается полупроводниковая нанопроволока с акцепторным типом центров поверхностной рекомбинации, плотность которых равна N_s. Электроны из объёма захватываются на поверхностные центры, в результате чего поверхность заряжается отрицательно и вблизи поверхности образуется положительно заряженная область объёмного заряда, имеющая толщину ω. Зонная диаграмма полупроводниковой нанопроволоки принимает следующий вид:

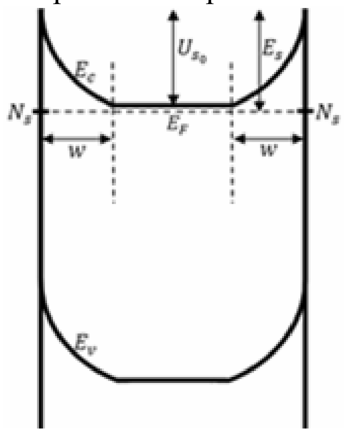


Рис.1. *Зонная диаграмма нанопроволоки.*

В результате, имеет место изгиб зон вблизи поверхности и образуется потенциальный барьер U_{So} (рис.1). Для того, чтобы электрон смог достигнуть поверхности и рекомбинировать, ему нужно преодолеть потенциальный барьер U_{So}. При некотором критическом радиусе нанопроволоки R_C область объёмного заряда занимает весь объём нанопроволоки. Нужно отметить, что подобный эффект возможен, если НП имеет такой радиус, что электроны из объема НП не в состоянии заполнить все поверхностные состояния:

$$N_S > \frac{N_D R}{2} \ .$$

Для определения зависимости потенциала от координаты необходимо решить уравнение Пуассона в сферических координатах. Так как длина проволоки намного больше, чем его радиус, то можно считать проволоку бесконечно длинной. В этом случае получим одномерное уравнение:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\varphi\right) = -\frac{eN_D}{\varepsilon\varepsilon_0}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(R-\omega) = 0, \\ &\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=R-\omega} = 0, \\ &\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=R} = -\frac{en_s}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{2}$$

где N_D – концентрация легирования, ε – диэлектрическая проницаемость, ε_0 – диэлектрическая постоянная, e – заряд электрона.

$$n_s = \frac{N_s}{1+\exp[\frac{E_A - E_F}{kT}]}, \tag{3}$$

$$E_F = E_C(0) - kT\ln[\mathrm{N}_C/\mathrm{N}_D],\ E_A - E_C(R) = \varphi(R) \tag{4}.$$

Из третьего граничного условия, учитывая (3) и (4), получим:

$$\varphi'(\mathrm{R}) = -\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{N_S}{1+\dfrac{N_C}{N_D}\exp[-\dfrac{E_S}{kT}]\cdot\exp[-\dfrac{e\varphi(R)}{kT}]} \ .$$

Введя обозначение $a = \frac{N_C}{N_D}\exp[-\frac{E_S}{kT}]$, получим:

$$\varphi'(\mathrm{R}) = -\frac{eN_S}{\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{1+a\cdot\exp[-\dfrac{e\varphi(R)}{kT}]} \ . \qquad (5)$$

Решив уравнение (1) с граничными условиями (2), получим:

$$2R\omega-\omega^2 = \frac{2N_S R}{N_D}\cdot\frac{1}{1+a\exp[\dfrac{e^2N_D}{4\varepsilon\varepsilon_0 kT}(2R\omega-\omega^2-2(R-\omega)^2\ln\dfrac{R}{R-\omega})]} \ ,$$

которая позволяет получить связь между величинами N_S, R, N_D и E_S. В случае, когда весь объем НП становится ОПЗ, при этом $\omega \to R, R = R_C$. Тогда получим:

$$1+a\exp[x^2] = \frac{b}{x} \ ,$$

где: $R' = \frac{2N_S}{N_D}, R'' = \sqrt{\frac{4\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2 N_D}}, b = \frac{R'}{R''}, x = \frac{R_C}{R''}$.

3. Результаты и обсуждение

В работе исследована зависимость критического радиуса GaAs-НП от уровня легирования, плотности поверхностных состояний и их энергии ионизации.

Рис.2 показывает изменение критического радиуса для различных значений энергии ионизации поверхностных состояний при фиксированных значениях уровня легирования (Рис.2). С ростом энергии ионизации значение критического радиуса увеличивается. Эта зависимость обусловлена тем, что более глубокие поверхностные центры

приводят к большим изгибом энергетических зон и, следовательно, к большему числу захваченных электронов.

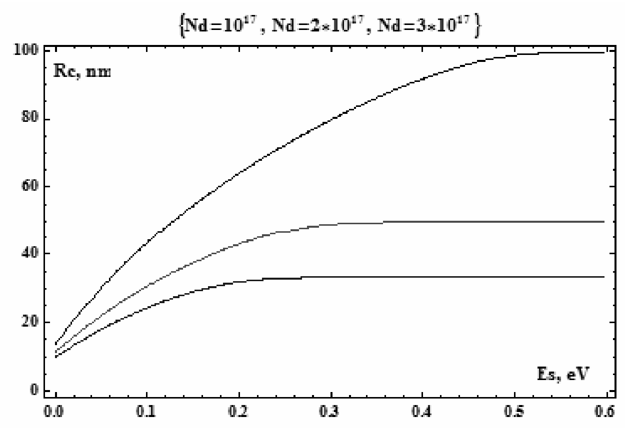


Рис. 2. *Зависимость критического радиуса от энергии ионизации поверхностных центров для GaAs-НП.*

На Рис.3 показано изменение критического радиуса от уровня легирования при различных значениях концентрации поверхностных состояний. На графике видно, что состояние полного обеднения НП достигается при меньших радиусах, если степень легирования увеличивается, т.е. увеличивается число электронов в объеме.

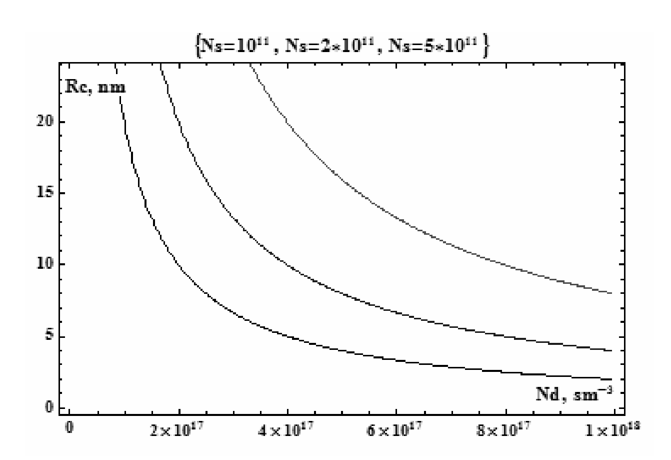


Рис. 3. *Зависимость критического радиуса от уровня легирования для GaAs-НП ($E_S = 0.25eV$).*

На Рис. 4 показана зависимость критического радиуса от плотности поверхностных состояний. С ростом плотности поверхностных состояний увеличивается возможное число захваченных электронов, т.е. полное обеднение имеет место для НП с большим радиусом.

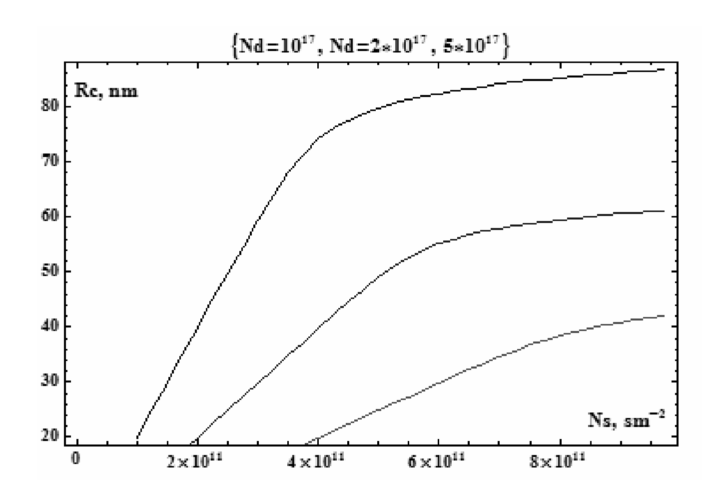


Рис. 4. *Зависимость критического радиуса от плотности поверхностных состояний для GaAs-НП.*

Заключение

Захват заряда на поверхностные состояния НП приводит к образованию обедненной области вблизи поверхности НП. Описанное явление приводит к уменьшению его электропроводящих характеристик, что является важной функцией в большинстве электронных устройств. Для НП с малыми радиусами или с низким уровнем легирования количество свободных носителей мало, и, в результате их захвата на поверхностные центры, НП может быть почти или полностью истощена. Простой аналитический подход был предложен для оценки критического радиуса НП, который соответствует полному истощению для данной плотности поверхностных состояний, энергии ионизации и уровня легирования объема.

Все выше рассмотренные эффекты истощения должны быть приняты во внимание при разработке конкретных устройств на основе НП. Одним из способов уменьшения негативного воздействия поверх-

ностных состояний является пассивация поверхности за счет его покрытия соответствующей тонкой оксидной или полупроводниковой пленкой (гетероструктура типа ядро-оболочка).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Soci C., Zhang A., Bao X.Y.,Kim H., Lo Y.,Wang D.* Journal of nanoscience and nanotechnology, vol. 10 (3), PP. 1430–1449 (2010).

2. *Sivakov V., Andra G., Gawlik A., Berger A., Plentz J., Falk F. and Christiansen S.H.*, Nano Lett., vol. 9 (4), PP. 1549–1554 (2009).

3. *Mariani G., Laghumavarapu R.B., Tremolet de Villers B., Shapiro J., Senanyake P., Lin A., Schwartz B.J. and Huffaker D.L.* Appl. Phys. Lett, vol. 97. PP. 013107 (2010).

4. *Mariani G., Wong P.-S., Katzenmeyer A.M., Leonard F., Shapiri J. and Huffake*r *D.L.* Nano Lett., vol. 11. PP. 2490 (2011).

5. *Chen R-S., Chen H.Y., Lu C.Y. et al.* Appl. phys. Lett., vol. 91. PP. 223106–1–223106–3 (2007).

6. *Kind H., Yan H., Messe B. et al*. Adv. Mater., vol. 14(2). PP. 158 (2002).

7. *Calarco R., Marso M.* Appl. Phys., vol. 87. PP. 499 (2007).

8. *Schmidt V., Senz S. and Gosele U.* “Influence of the Si/Sio2 interface on the charge carrier density of Si nanowires”, Appl. Phys., vol. 86. PP. 187–191 (2004).

CRITICAL RADIUS OF FULL DEPLETION INGAAS SEMICONDUCTOR NANOWIRES CAUSED BY SURFACE CHARGE TRAPPING

***V.A. Khachatryan*[1]**

Russian-Armenian University

vars.khachatryan1990@gmail.com

ABSTRACT

We have presented a simple analytical model for estimating critical radius of full depletion in GaAs semiconductor nanowires due to charge carrier trapping at surface states and radial band bending. The model describes the critical radius functional dependences on doping level, surface states parameters and appears as a very useful tool to understand transport properties of nanowires limited particularly by surface effects.

Keywords: semiconductor, nanowires, critical radius, full depletion.

ԱՄԲՈՂՋՈՒԹՅԱՄԲ ՍՊԱՌՎԱԾ GAAS ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴՉԱՅԻՆ ՆԱՆՈԼԱՐԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՇԱՌԱՎԻՂԸ

***Վ.Ա. Խաչատրյան*[1]**

Հայ-Ռուսական համալսարան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում ներկայացված պարզ մոդելը թույլ է տալիս գնահատել կիսահաղորդչային նանոլարի կրիտիկական շառավիղը այն դեպքում, երբ ծավալային լիցքի տիրույթը գրավում է ամբողջ նանոլարը: Լիցքակիրները կլանվում են մակերևույթային վիճակների կողմից, ինչի հետևանքով ձևավորվում է ծավալային լիցքի տիրույթ, և գոտիների շեղում: Ներկայացված մոդելը նկարագրում է կրիտիկական շառավղի կախվածությը ու նըլեգիրացման աստիճանից և մակերևույթային վիճակներից, ինչը թուլ է տալիս գնահատել նանոլարի հաղորդականությունը՝ սահմանափակված, մասնավորապես, մեկերևույթային վիճակներով:

Հիմնաբառեր՝ կիսահաղորդիչ, նանոլար, կրիտիկական շառավիղ:

Вестник РАУ № 2, 2016, 76-85

Х И М И Я

УДК 547.491.8.07

СИНТЕЗ ПРОИЗВОДНЫХ 5-((ПИРАЗОЛ-4-ИЛ)ТИО)-1,3,4-ТИАДИАЗОЛА

А.А. Григорян, Э.Н. Амбарцумян, А.С. Ворсканян, А.П. Енгоян

Российско-Армянский университет
Национальный аграрный университет Армении

ayengoyan@mail.ru

АННОТАЦИЯ

На базе 3-фенил(бензил)-1,3,4-тиадиазолидин-2,5-дитионов и 5-(алкилтио)-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тионов синтезированы их соответствующие S-пентан-2,4-дионы. Гетероциклизацией последних гидразином и его различными N-замещенными производными получен ряд бициклических и трициклических соединений с сочетанием в молекулах 1,3,4-тиадиазольного, пиразольного и пиримидинового циклов. При предварительных лабораторно-вегетационных испытаниях синтезированные соединения проявили свойства стимуляторов роста растений.

Ключевые слова: 1,3,4-тиадиазол, гетероциклизация, пиразолилтио-тиадиазол, ростостимуляторы.

Производные 1,3,4-тиадиазола проявляют широкий спектр биологической активности. Соединения, синтезированные на базе этого гетероцикла, используются как в медицинской практике, так и в сель-

ском хозяйстве в качестве химических средств защиты растений [1]. Неудивительно, что поиски новых лекарственных препаратов и пестицидов в ряду новых производных 1,3,4-тиадиазола продолжаются, среди которых обнаружены соединения с противосудорожной, антимикробной, противовоспалительной, анксиолитической, противогрибковой, противоопухолевой, противотуберкулезной, анестетической, антидепрессантной [2–12] и пестицидной [13,14] активностями.

Учитывая пестицидную активность некоторых соединений, синтезированных нами ранее в ряду S-замещенных 1,3,4-тиадиазолов, а также доступность и высокие выходы их синтеза [15–20], представлялось целесообразным продолжить синтетические работы в этом направлении на базе этого гетероцикла.

Целью настоящего исследования явился целенаправленный синтез неконденсированных бигетероциклических систем с сочетанием в молекуле 1,3,4-тиадиазольного и пиразольного гетероциклов. Производные последнего также являются объектами пристального внимания исследователей в плане поиска новых средств защиты растений [21–31].

В качестве исходных продуктов использовались 3-фенил(бензил)-1,3,4-тиадиазолидин-2,5-дитионы (**1,2**) и 5-(алкилтио)-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тионы (**7,8**). Их взаимодействием с ацетилацетоном получены соответствующие S-пентан-2,4-дионы (**3,4,9,10**). Исходные соединения (**1,2,7,8**) могут существовать в тионной или тиольной таутомерных формах. Наличие в спектрах ^{13}C ЯМР сигналов в области 185 м.д., относящихся к двойной связи C=S, согласуется с их тионной структурой. Вместе с тем реакция замещения может протекать как по атому серы, так и по эндоциклическому атому азота. Исчезновение поглощений двойной связи C=S в спектрах ^{13}C ЯМР указывает на то, что реакция замещения осуществляется по атому серы.

1,3,5 R = C_6H_5; **2,4,6** R = $CH_2C_6H_5$; **7,9,11** $R^1 = CH_3$; **8,10,12** $R^1 = C_2H_5$.

R^2 = **a**) H, **b**) CH_3, **c**) C_6H_5, **d**) *p*-CH_3-C_6H_4-SO_2, **e**) H_2N–

Гетероциклизацией соединений **3,4,9,10,** замещенными гидразинами, синтезирован ряд целевых 5-((3,5-диметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-1,3,4-тиадиазолов с различными заместителями в пиразольном цикле (**5,6,11,12**).

При предварительных лабораторно-вегетационных испытаниях синтезированные соединения оказывали стимулирующие действие на рост растений в интервале 50–87% по сравнению с широко применяемым ростостимулятором гетероауксином. Три из них, которые обладали активностью выше 70%, отобраны для более глубоких исследований и последующих полевых испытаний.

Экспериментальная часть

Спектры ^1H и ^{13}C ЯМР сняты на спектрометре “Mercury-300” с рабочей частотой 300 МГц в растворе ДМСО-d_6 + CCl_4 (1:3). В качестве внутреннего стандарта использовался тетраметилсилан (ТМС). За ходом реакций и чистотой синтезированных соединений следили как спектральным методом, так и с помощью тонкослойной хроматографии на пластинах “Silufol UV-254”. В качестве элюента использовалась смесь растворителей ацетон-гексан в соотношении 2:1, проявитель – смесь 2% $AgNO_3$ + 0.4% бромфенолового синего + 4% лимонной кислоты.

Синтез соединений 3, 4

Растворяют 0.01 моля калиевой соли соединения **1** (или **2**) в 4–5мл воды и при охлаждении льдом по каплям прибавляют 1.47 г (0.011 моль) 3-хлорпентан-2,4-диона. Смесь перемешивают при комнатной температуре 2-3 ч и оставляют на ночь. К смеси прибавляют 3-4 мл холодной воды и полученный кристаллический продукт реакции отфильтровывают, промывают разбавленным раствором NaOH, затем водой и высушивают на воздухе.

3-((4-Фенил-5-тиоксо-4,5-дигидро-1,3,4-тиадиазол-2-ил)тио)пентан-2,4-дион (3).

Выход 85%, т.пл 168-170 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.49 (с, 6H, $2\times CH_3$); 7.40-7.79 (м, 5H, C_6H_5); 17.39 (ушс, 0.8H, OH-енол). Спектр ^{13}C ЯМР δ м.д.: 23.99, 98.66, 124.95, 128.16, 128.24, 137.90, 184.82, 197.54. 325 (M+1). Найдено: N, 8.46; S, 29.39. $C_{13}H_{12}N_2O_2S_3$. Вычислено: N, 8.63; S, 29.65.

3-((4-Бензил-5-тиоксо-4,5-дигидро-1,3,4-тиадиазол-2-ил)тио)пентан-2,4-дион (4).

Выход 70%. т.пл.96-98 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.38 (с, 6H, $2\times CH_3$); 5.39 (с, 2H, CH_2); 7.26-7.42 (м, 5H, C_6H_5); 17.40 (ушс, 0.8H, OH-enol). Найдено: N, 8.10; S, 28.19. $C_{14}H_{14}N_2O_2S_3$. Вычислено: N, 8.28; S, 28.42.

Синтез соединений 9, 10

Получены аналогично **3,4** из 0.01 моля соединений **7,8** и 1.47 г (0.011 моля) 3-хлор-пентан-2,4-диона.

3-((5-(Метилтио)-1,3,4-тиадиазол-2-ил)тио)пентан-2,4-дион (9).

Выход 90 %. т.пл.56-58 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.43 (с, 6H, $2\times CH_3$); 2.75 (с, 3H, SCH_3); 17.30 (ушс, 0.8H, OH-енол). Спектр ^{13}C ЯМР δ м.д.: 15.80, 23.80, 101.07, 165.57, 166.37, 197.12. Найдено: N, 10.80; S, 36.75. $C_8H_{10}N_2O_2S_3$. Вычислено: N, 10.68; S, 36.66.

3-((5-(Этилтио)-1,3,4-тиадиазол-2-ил)тио)пентан-2,4-дион (10).

Выход 72 %. т.пл.51-52 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 1.45 (т, J = 7.2, 3H, $SCH_2\mathit{CH_3}$); 2.45 (с, 6H, $2\times CH_3$); 3.27 (к, J = 7.2, 2H, $S\mathit{CH_2}CH_3$); 17.27 (ушс, 0.8H, OH-енол). Найдено: N, 10.02; S, 34.59. $C_9H_{12}N_2O_2S_3$. Вычислено: N, 10.14; S, 34.80.

Синтез соединений 5a, 11a, 12a

К смеси 0.01 моля соединений **3, 9** или **10** в 3 мл ледяной уксусной кислоты прибавляют 1 мл (0.014 моля) 70% гидразингидрата. Смесь оставляют при комнатной температуре 20–22 ч, затем прибавляют 5 мл холодной воды и полученные кристаллы отфильтровывают, промывают разбавленным раствором HCl, затем водой и высушивают на воздухе.

5-((3,5-Диметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-3-фенил-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тион (5a).

Выход 90%. т.пл 134-135 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.31 (с, 6H, 2×CH_3); 7.39-7.76 (м, 5H, C_6H_5); 12.80 (ушс, 1H, NH). Найдено: N, 17.48; S, 30.01. $C_{13}H_{12}N_4S_3$. Вычислено: N, 17.48; S, 30.01.

2-((3,5-Диметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-5-(метилтио)-1,3,4-тиадиазол (11a).

Выход 83%, т.пл. 131-133 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.25 (с, 6H, 2×CH_3); 2.68 (с, 3H, SCH_3); 12.72 (ушс, 1H, NH). Спектр ^{13}C ЯМР δ м.д.: 15.65, 100.99, 164.42, 170.03. Найдено: N, 21.42; S, 37.03. $C_8H_{10}N_4S_3$. Вычислено: N, 21.68; S, 37.22.

2-((3,5-Диметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-5-(этилтио)-1,3,4-тиадиазол (12a).

Выход 98%, т.пл. 130-131 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 1.45 (т, J = 7.2, 3H, $SCH_2\mathit{CH_3}$); 2.26 (с, 6H, 2×CH_3); 3.27 (к, J = 7.2, 2H, $S\mathit{CH_2}CH_3$); 12.66 (ушс, 1H, NH). Найдено: N, 20.32; S, 35.11. $C_9H_{12}N_4S_3$. Вычислено: N, 20.57; S, 35.31.

Синтез соединений 5b, 11b

Растворяют 3 г (0.002 моля) метилгидразинсульфата в 3 мл воде, прибавляют 2.8 г (0.002 моля) K_2CO_3, затем 0.001 моля соединения **3** (или **9**). Смесь нагревают при 45–50 ^{0}C в течение 5–6 ч. Охлаждают, полученный продукт отфильтровывают, промывают разбавленным раствором HCl, затем эфиром.

3-Фенил-5-((1,3,5-триметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тион (5b).

Выход 70%, т.пл. 163-165 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.22 и 2.34 (сс, 3H,3H, 3-CH_3 и 5-CH_3); 3.77 (с, 3H, NCH_3); 7.37-7.77 (м, 5H, C_6H_5). Найдено: N, 16.51; S, 28.39. $C_{14}H_{14}N_4S_3$. Вычислено: N, 16.75; S, 28.76.

2-(Метилтио)-5-((1,3,5-триметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-1,3,4-тиадиазол (11b).

Выход 83%, т.пл. 73-75 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.19 и 2.33 (сс, 3H,3H, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.69 (с, 3H, SCH_3); 3.77 (с, 3H, NCH_3). Спектр ^{13}C ЯМР δ м.д.: 9.41, 11.21, 15.67, 6.25, 101.75, 143.17, 149.28, 164.69, 169.29. Найдено: N, 20.57; S, 35.31. $C_9H_{12}N_4S_3$. Вычислено: N, 20.57; S, 35.31.

Синтез соединений 5c, 11c

Смесь 0.001 моля соединения **3** (или **9**) и 1.08г (0,001моля) фенилгидразина в 4 мл ледяной уксусной кислоты нагревают при 45–50°C 5–6 ч и оставляют на ночь. Затем к смеси прибавляют 5–6 мл холодной воды и полученный кристаллический продукт отфильтровывают. Очищают гексаном.

5-((3,5-Диметил-1-фенил-1*H*-pyrazol-4-ил)тио)-3-фенил-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тион (5c).

Выход 77%, т.пл. 155-157 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.30 и 2.38 (сс, 3H,3H, 3-CH_3 и 5-CH_3); 7.30-7.78 (м, 10H, 2×C_6H_5). Найдено: N, 14.02; S, 24.03. $C_{19}H_{16}N_4S_3$. Вычислено: N, 14.13; S, 24.25.

2-((3,5-Диметил-1-фенил-1*H*-pyrazol-4-ил)тио)-5-(метилтио)-1,3,4-тиадиазол (11c).

Выход 75%, т.пл. 83-84 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.30 и 2.39 (сс, 3H,3H, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.68 (с, 3H, SCH_3); 7.32-7.78 (м, 5H, C_6H_5). Найдено: N, 16.75; S, 28.76. $C_{14}H_{14}N_4S_3$. Вычислено: N, 16.75; S, 28.76.

Синтез соединений 5d, 6d, 11d, 12d

Соединения **5d,6d,11d,12d** получены аналогично синтезу соединения **5a** из 0.0011 моля соединений **3,4,9,10** и 2 г (0.001моль) 4-метилфенилсульфонгидразида в 3–4 мл ледяной уксусной кислоты.

5-((3,5-Диметил-1-тозил-1*H*-pyrazol-4-ил)тио)-3-фенил-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тион (5d).

Выход 85%, т.пл. 138-140 ^{0}C. Спектр ^{1}H ЯМР δ м.д.: 2.25 и 2.40 (сс, 3H,3H, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.65 (с, 3H, CH_3-тозил); 7.35-7.90 (м, 9H, C_6H_5 и C_6H_4). Найдено: N, 11.59; S, 26.81. $C_{20}H_{18}N_4O_2S_4$. Вычислено: N, 11.80; S, 27.02.

5-((3,5-Диметил-1-тозил-1*H*-pyrazol-4-ил)тио)-3-бензил-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тион (**6d**).

Выход 90%, т.пл. 100-101 ^{0}С. Спектр ^{1}Н ЯМР δ м.д.: 2.20 и 2.38 (сс, 3Н,3Н, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.61 (с, 3Н, CH_3-тозил); 5.33 (с, 2Н, CH_2); 7.26-7.88 (м, 9Н, C_6H_5 и C_6H_4). Найдено: N, 11.60; S, 26.41. $C_{21}H_{20}N_4O_2S_4$. Вычислено: N, 11.47; S, 26.24.

2-((3,5-Диметил-1-тозил-1*H*-pyrazol-4-ил)тио)-5-(метилтио)-1,3,4-тиадиазол (**11d**).

Выход 85%, т.пл. 116-118 ^{0}С. Спектр ^{1}Н ЯМР δ м.д.: 2.23 и 2.47 (сс, 3Н,3Н, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.66 (с, 3Н, CH_3-тозил); 2.71 (с, 3Н, SCH_3); 7.40-7.89 (м, 5Н, C_6H_4). Спектр ^{13}С ЯМР δ м.д.: 11.57, 11.71, 15.72, 21.07, 108.56, 127.56, 129.72, 133.79, 145.39, 147.90, 154.06, 164.86, 165.93. $C_{15}H_{16}N_4O_2S_4$. Найдено: N, 13.32; S, 30.88. $C_{15}H_{16}N_4O_2S_4$. Вычислено: N, 13.58; S, 31.08.

2-((3,5-Диметил-1-тозил-1*H*-pyrazol-4-ил)тио)-5-(этилтио)-1,3,4-тиадиазол (**12d**).

Выход 84%, т.пл. 120-122 ^{0}С. Спектр ^{1}Н ЯМР δ м.д.: 1.47 (т, J = 7.2, 3Н, $SCH_2\mathit{CH_3}$); 2.23 и 2.47 (сс, 3Н,3Н, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.66 (с, 3Н, CH_3-тозил); 3.31 (к, J = 7.2, 2Н, $S\mathit{CH_2}CH_3$); 7.40-7.89 (м, 5Н, C_6H_4). Найдено: N, 13.30; S, 30.25. $C_{16}H_{18}N_4O_2S_4$. Вычислено: N, 13.13; S, 30.06.

Синтез соединений 6e, 11e

Соединения **6e** и **11e** получены аналогично синтезу соединения **5a** из 0.001 моля соединений **4** или **9** и 1.53 г (0.0011 моль) 2 амино-4-гидразино-6-метилпиримидина в 3-4 мл ледяной уксусной кислоты.

5-((1-(2-Амино-6-метилпиримидин-4-ил)-3,5-диметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-3-бензил-1,3,4-тиадиазол-2(3*H*)-тион (6e).

Выход 80%, т.пл 148-150 ^{0}С. Спектр ^{1}Н ЯМР δ м.д.: 2.30 и 2.40 (сс, 3Н,3Н, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.70 (с, 3Н, CH_3-пирим.); 5.31 (с, 2Н, CH_2); 6.20 (ушс, 2Н, NH_2); 6.95 (с, 1Н, СН-пирим.), 7.28-7.87 (м, 5Н, C_6H_5). Найдено, (%): N, 22.33; S, 21.50. $C_{19}H_{19}N_7S_3$. Вычислено, (%): N, 22.20; S, 21.78.

5-((1-(2-Амино-6-метилпиримидин-4-ил)-3,5-диметил-1*H*-пиразол-4-ил)тио)-2-метилтио-1,3,4-тиадиазол (11e).

Выход 90%, т.пл 216-218 ^{0}С. Спектр ^{1}Н ЯМР δ м.д.: 2.30 и 2.42 (сс, 3Н,3Н, 3-CH_3 и 5-CH_3); 2.71 (с, 3Н, CH_3- пирим.); 2.83 (с, 3Н,

SCH_3); 6.30 (ушс, 2Н, NH_2); 6.94 (с, 1Н, СН-пирим.). Найдено, (%): N, 26.58; S, 26.10. $C_{13}H_{15}N_7S_3$. Вычислено, (%): N, 26.83; S, 26.32.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электронный источник. Режим выхода: http://www.alanwood.net/pesticides/class_pesticides.html
2. *Yusuf M., Khan R., Ahmad B.* // Bioorg. Med. Chem. 16. 2008. PP. 8029–8034.
3. *Clerici F., Pocar D., Guido M., Loche A., Perlini V., Brufani, M.* // J. Med. Chem. 44. 2001. PP. 931–936.
4. *Dogan H.N., Duran A., Rollas S., Sener G., Uysal M.K., Gulen D.* // Bioorg. Med. Chem. 10. 2002. PP. 2893–2898.
5. *Padmavathi V., Reddy S., Reddy G., Venkatesh B., Padmaja A.* // J. Heterocycl. Chem. 48. 2011. PP. 1197–1201.
6. *Kadi A., El-Brollosy N., Al-Deeb O., Habib E., Ibrahim T., El-Emam A.* // Eur. J. Med. Chem. 42. 2007. PP. 235–242.
7. *Shakya A., Patnaik G., Mishra P.* // Eur. J. Med. Chem. 27. 1992. PP. 67–71.
8. *Mazzone G., Pignatello R., Mazzone S., Panico A., Pennisi G., Castana R., Mazzone P.* // Farmaco. 48. 1993. PP. 1207–1224.
9. *Oruç E., Rollas S., Kandemirli F., Shvets N., Dimoglo A.* // J. Med. Chem. 47. 2004. PP. 6760–6767.
10. *Fang Liu, Xiao-Qiong, Luo Bao-An, Song Pinaki S, Bhadury Song, Yang Lin-Hong, Jin Wei, Xue De-Yu Hu.* // Bioorg. Med. Chem. 16. 2008. PP. 3632–3640.
11. *Xing-Hai Liu, Yan-Xia Shi, Yi Ma, Chuan-Yu Zhang, Wei-Li Dong, Li Pan, Bao-Lei Wang, Bao-Ju Li, Zheng-Ming Li.* // Eur. J. Med. Chem. 44. 2009. PP. 2782–2786.
12. *Matysiak J.* // QSAR & Combinatorial Sci. 27. 2008. PP. 607–617.
13. *Wang T., Miao W., Wu Sh., Bing G., Zhang X., Qin Z., Yu H., Qin X.* // Chin. J. Chem. 29. 2011.PP. 959–967.
14. *Shiga Y., Okada I., Fukuchi T.* // Pestic. Sci. 28. 2003. PP. 310–312.
15. *Довлатян В.В., Дживанширян Т.Л., Аветисян Ф.В., Енгоян А.П.* // Хим. ж. Арм. 57. 2004. СС. 66–72.
16. *Довлатян В.В., Дживанширян Т.Л., Аветисян Ф.В., Амбарцумян Э.Н., Ворсканян А.С., Енгоян А.П.* // Хим. ж. Арм. 61. 2008. СС. 242–253.

17. *Григорян А.А.* // Вестник РАУ, сер. физ.-мат. и естеств. наук. №2. 2014. СС. 46–51.
18. *Григорян А.А.* // Хим. ж. Арм. 69(3). 2016. СС. 341–349.
19. *Hambardzumyan E.N., Vorskanyan A.S., Grigoryan A.A., Yengoyan A.P.* // Amer. Chem. Sci. J. 15(1). 2016. PP. 1–9.
20. *Hambardzumyan E.N., Vorskanyan A.S., Grigoryan A.A., Yengoyan A.P.* // J.Chem. Biol. Phys. Sci. Section A, Chem.Sci. 6(2). 2016. PP. 434–444.
21. *Chen H., Li Zh., Han Y.* // J. Agric. Food Chem. 48. 2000. PP. 5312–5315.
22. *Vicentini Ch. B., Romagnoli C., Andreotti E., Mares D.* // J. Agric. Food Chem. 55(25), 2007. PP. 10331–10338.
23. *Yan Li, Hong-Quan Zhang, Jie Liu, Xiang-Ping Yang, Zhao-Jie Liu.* // J. Agric. Food Chem. 54. 2006. PP. 3636–3640.
24. *Hansong Chen, Zhengming Li, Yufeng Han.* // J. Agric. Food Chem. 48. 2000. PP. 5312–5315.
25. *Nishioka M., Nakashita H., Yasuda M., Yoshida Sh., Yamaguchi I.* // J. Pestic. Sci. 30. 2005. PP. 47–49.
26. *Vicentini Ch. B., Guccione S., Giurato L., Ciaccio R., Mares D., Forlani G.* // J. Agric. Food Chem. 53. 2005. PP. 3848–3855.
27. *Ohno R., Watanabe A., Nagaoka M., Ueda T., Sakurai H., Hori M., Hirai K.* // J. Pestic. Sci. 29. 2004. PP. 96–104.
28. *Wei-Min Liu, You-Quan Zhu, Yi-Feng Wang, Bin Liu, Xiao-Mao Zou, Hua-Zheng Yang.* // J. Heterocycl. Chem. 44. 2007. PP. 967–971.
29. *Jun-Fei Li, You-Quan Zhu, Xin Wang, Hua-Zheng Yang.* // J. Heterocycl. Chem. 44. 2007. PP. 749–755.
30. *Siddall T.L., Ouse D.G., Benko Z.L., Garvin G.M., Jackson J.L., McQuiston J.M., Ricks M.J., Thibault Th.D., Turner J.A., VanHeertum J.C., Weimer M.R.* // Pest Manag. Sci. 58. 2002. PP. 1175–1186
31. *Finkelstein B.L., Strock Ch.J.* // Pestic. Sci. 50. 1997. PP. 324–328.

SYNTHESIS OF 5-((PYRAZOL-4-YL)THIO)-1,3,4-THIADIAZOLE DERIVATIVES

A. Grigoryan, E. Hambardzumyan, A. Vorskanyan, A. Yengoyan

ABSTRACT

On the basis of 3-phenyl(benzyl)-1,3,4-thiadiazolidine-2,5-dithiones and 5-(alkylthio)-1,3,4-thiadiazol-2(3*H*)-thiones their corresponding S-

pentane-2,4-diones were synthesized. The heterocyclization of these diones with hydrazine and its various N-substituted derivatives afforded a series of bicyclic and tricyclic compounds with combination of 1,3,4-thiadiazole, pyrazole and pyrimidine cycles in the same molecules. In preliminary laboratory-vegetation tests the synthesized compounds have shown the plant growth stimulant properties.

Keywords: 1,3,4-thiadiazole, heterocyclization, pyrazolyl-thio-thiadiazole, plant growth stimulators.

5-((ՊԻՐԱԶՈԼ-4-ԻԼ)ԹԻՈ)-1,3,4-ԹԻԱԴԻԱԶՈԼԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ա.Ա.Գրիգորյան, Է.Ն.Համբարձումյան, Ա.Ս.Վորսկանյան, Ա.Փ.Ենգոյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

3-Ֆենիլ(բենզիլ)-1,3,4-թիադիազոլիդին-2,5-դիթիոնների և 5-(ալկիլթիո)-1,3,4-թիադիազոլ-2(3*H*)-թիոնների հիմքի վրա սինթեզվել են դրանց համապատասխան S-պենտան-2,4-դիոնները: Վերջիններիս հետերոցիկլումը հիդրազինով և դրա N-տեղակալված ածանցյալներով հանգեցնում է բիցիկլիկ և տրիցիկլից միացությունների՝ մոլեկուլներում 1,3,4-թիադիազոլային, պիրազոլային և պիրիմիդինային ցիկլերի համադրությամբ: Նախնական լաբորատոր-վեգետացիոն փորձարկումների ընթացքում սինթեզված միացությունները ցուցաբերել են բույսերի աճը խթանող հատկություններ:

Հիմնաբառեր՝ 1,3,4-թիադիազոլ, հետերոցիկլում, պիրազոլիլթիո-թիադիազոլ, բույսերի աճախթանիչներ:

БИОЛОГИЯ

АНТИРАДИКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЭТАНОЛЬНЫХ ЭКСТРАКТОВ ЛИСТЬЕВ *PRUNELLA VULGARIS L.* И *OCIMUM BASILICUM L.*

Казарян Ш.А.[1], Рштуни Л.Р.[1], Геворкян М.Л.[2], Оганян А.Ж.[1], Вардапетян Г.Р.[1]

[1] Российско-Армянский университет
[2]Ереванский государственный университет

shkazaryan1@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Исследованы общее содержание флавоноидов и антирадикальная активность (АРА) этанольных экстрактов листьев двух представителей семейства Яснотковые (*Lamiaceae*): черноголовки обыкновенной (*Prunella vulgaris*) и базилика душистого (*Ocimum basilicum*), прорастающих на территории Армянского нагорья. Методом ВЭЖХ проведен анализ содержания в них кверцетина, рутина и апигенина. Выявлено, что в экстракте *O. basilicum* общее содержание флавоноидов (27,2 ± 0.11 мг/г) в 2 раза выше, чем в экстракте *P. vulgaris* (13,13±0,012 мг/г). При этом АРА экстракта *P. vulgaris* (IC_{50}=0,65±0,005 мг/г) в 6 раз выше, чем у экстракта *O. basilicum* (IC_{50}=3.9±0.08 мг/г). ВЭЖХ анализ показал, что в экстракте *O. Basilicum* мажорными флавоноидами были рутин и кверцетин, в экстракте *P. vulgaris* - рутин и апигенин.

Ключевые слова: *Prunella vulgaris L.*, *Ocimum basilicum L.,* флавоноиды, антирадикальная активность, ВЭЖХ.

Введение. Черноголовка обыкновенная (*Prunella vulgaris*) и базилик душистый (*Ocimum basilicum*) представители семейства Яснотко-

вых (*Lamiaceae*), включающего в себя 236 родов и 6900-7200 видов. В связи с широким распространением растений семейства Яснотковых и содержанием большого спектра вторичных метаболитов все больше возрастает интерес к изучению свойств растений *Lamiaceae* [1].

Помимо использования в качестве приправы в кулинарии, *O.basilicum* нашел широкое применение также и в народной медицине, где его используют в качестве средства от головной боли, кашля, заболеваний желудочно-кишечного тракта и почек [2]. Исследованы антимикробные свойства некоторых видов *O.basilicum*, он эффективен и при лечении некоторых вирусных заболеваний. Примечательно, что при этом смягчается проявление побочных эффектов, часто проявляющихся при применении синтетических антимикробных препаратов [3]. Кроме этого изучены и противовоспалительные, противоопухолевые, антиоксидантные и противогрибковые свойства некоторых видов *O.basilicum* [4]. *O.basilicum* проявляет ингибирующую активность в отношении ВИЧ-1 обратной транскриптазы и способен подавлять агрегацию тромбоцитов, индуцированную коллагеном и АДФ [5]. Эксперименты на крысах показали, что экстракт листьев *O.basilicum* увеличивает активность глутатионтрансферазы, которая в определенной степени способна защитить клетки органов ЖКТ от химического карценогенеза [6].

Вид *Ocimum* содержит большое количество эфирных масел, фенольных компонентов и антоцианинов, которые являются сильными антиоксидантами [7]. Основными эфирными маслами *O.basilicum* являются эвгенол, изоэвгенол, хавикол, эстрагол и линалоол, которые в *in vitro* исследованиях проявили сильные антиоксидантные, противоопухолевые, антимикробные и противовирусные свойства [8]. В *O.basilicum* обнаружены также розмариновая и кофейная кислоты, которые обладают сильными антибактериальными и противовоспалительными свойствами [9]. Флавоноиды и другие фенольные компоненты базилика обладают также антирадикальными свойствами [10].

P.vulgaris, или черноголовка обыкновенная, широко распространенное в Азии, Европе, Северной Америке и Северной Африке [11]. Благодаря своей высокой биологической активности экстракты *P. vulgaris* издревле применяются в китайской народной медицине [12]. Известно, что в *P. Vulgaris* содержатся такие вторичные метаболиты как розмариновая кислота, тритерпены, флавоноиды, танины, алка-

лоид прунелин, олеаноловая, бетулиновая и урсоловая кислоты и др [13], [14]. Благодаря высокому содержанию вторичных метаболитов *P. Vulgaris* используется в лечении таких заболеваний, как рак легких, диабет, повреждения печени, болезнь Альцгеймера, зоб, туберкулез и др [15]. Имеются данные и о иммуномодулирующей и антивиральной активностях. Особое внимание следует уделить изучению антиоксидантных свойств *P.vulgaris* и влиянию его экстрактов на течение болезней, в основе которых лежат окислительные процессы [16]. Однако, несмотря на высокую биологическую активность экстрактов *P.vulgaris,* практически отсутствуют исследования экстрактов растения, прорастающего на территории Армении.

Высокая антиоксидантная активность экстрактов *P.vulgaris* связывается с наличием в их составе таких вторичных метаболитов, как флавоноиды [17], среди которых чаще всего упоминаются рутин и кверцетин [18].

Спектр биологической активности лекарственных растений определяется наличием в их составе разных классов, подклассов и групп вторичных метаболитов, которые могут обладать мультиплетным механизмом действия. Их количественный и качественный состав определяет фармакологический эффект конкретного растения.

Целью настоящей работы являлось исследование антирадикальных свойств экстрактов *O.basilicum* и *P.vulgaris*, растущих на Армянском нагорье, и сравнение их флавоноидного состава.

Материалы и методы. Методика получения и исследования экстракта листьев *O.basilicum* сообщалась нами ранее в [19].

Листья *P.vulgaris* (сбор в июне 2016 года в Армении, Котайкский марз), после предварительной промывки, стерилизовали в 1% (V/V) растворе гипохлорида натрия и высушивали до 10% влажности.

Для получения экстрактов использовали 96%-ный этанол. Сухие листья *P.vulgaris* после механической гомогенизации экстрагировали (в соотношении 1 г на 30 мл экстрагента) ультразвуковом (75Вт, 15 мин в Ultrasonic Homogenizer, Sonic-150W, фирмы MRC). После 24-часовой инкубации на качалке (60-70 об/мин) экстракты центрифугировали 15 минут при 3000 об/мин на центрифуге Jouan GR412[10]. Общее содержание флавоноидов определяли за счет способности флавоноидов хелатировать атомы Al^{3+}, при 430 нм, по методу [20].

Разделение флавоноидов выполняли методом высокоэффективной жидкостной хроматографии (ВЭЖХ) на хроматографе Waters Alliance 2695 со спектрофотометрическим и диодно-матричным детекторами и программным обеспечением обработки данных Mass Lynx на колонке C-18 (250x4mm, размер частиц 4,5 нм). В качестве элюирующей системы использовали градиент - деионизированная вода, содержащая 0.1 мл/л 90% ортофосфорной кислоты (раствор А) и ацетонитрил (раствор Б). 0-5 мин раствор Б линейно доводили от 10% до 40%, далее 3 мин до 50% и на протяжении последних 22 минут поддерживали изократически данное соотношение растворов (А и Б, соответственно). В качестве стандартов использовали растворы кверцетина, рутина и апигенин (Sigma Aldrich) в этаноле. Детекцию проводили при 365нм.

Антирадикальную активность (АРА) определяли методом тушения свободного радикала DPPH (2,2-дифенил-1-пикрилгидразил) при 517 нм на спектрофотометре 6405 UV/Vis [20]. Статистический анализ проводился посредством программы Microsoft Office Excel.

Результаты и обсуждение. Ранее было показано [19], что в этанольных экстрактах листьев *O.basilicum* общее содержание флавоноидов составляет 27,2 ± 0.11 мг/г, что примерно в два раза меньше, чем в листьях *P.vulgaris* (13,13±0,012 мг/г). Однако при такой разнице в общем содержании флавоноидов АРА экстракта (IC_{50}) *P. Vulgaris* в 6 раз активнее (0,65±0,005 мг/г), чем экстракт *O.basilicum* (3,9±0,08 мг/г). Из полученных результатов следует, что антирадикальная активность данных экстрактов определяется либо вторичными метаболитами нефлавоноидной природы, либо определенным соотношением содержания антиоксидантных флавоноидов.

Результаты ВЭЖХ экстрактов (Таблица 1) позволяют определить как количественное, так и качественное содержание отдельных флавоноидов. В экстракте *O.basilicum* были идентифицированы рутин (3.1±0,009 мкг/г), кверцетин (15.77±0,23 мкг/г) и апигенин (0,12±0,02 мкг/г). ВЭЖХ анализ экстракта *P.vulgaris* не выявил в нем кверцетина. Одновременно с этим было определено наличие рутина (254±0,03 мкг/г) и апигенина (8,8±0,008 мкг/г) в значительно больших концентрациях, чем в экстракте *O.basilicum.* Важным фактом является обнаружение в обоих экстрактах апигенина, за счет которого могут быть обусловлены антивиральные свойства данных растений.

Таблица1. Содержание флавоноидных компонентов в этанольных экстрактах *O.basilicum* и *P.vulgaris*.

Флавоноид	*O.basilicum*, мкг/г	*P.vulgaris*, мкг/г
Рутин	3,1±0,009	254±0,03
Кверцетин	15,77±0,23	-
Апигенин	0,27±0,02	8,8±0,008

Несмотря на то, что в экстракте *P.vulgaris* практически отсутствует кверцетин, высокие концентрации рутина и апигенина вносят некий вклад в общую антирадикальную активность, чем может быть и обусловлено низкое значение IC_{50}. Следует указать, что помимо флавоноидов в данных экстрактах имеются вторичные метаболиты других классов, например розмариновая кислота и др. [21], которые также обладают антиоксидантными свойствами.

Таким образом, первое исследование экстрактов *P.vulgaris* и *O.basilicum* выявило высокое содержание в них флавоноидов (13,13±0,012 мг/г и 27,2 ± 0.11 мг/г. соответственно) и высокую АРА *P.vulgaris,* количественный и качественный состав флавоноидов которого определяет его потенциальный фармакологический эффект при лечении вирусных форм заболеваний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Venkateshappa S.M. and Sreenath K.P.* American International Journal of Research in Formal, Applied & Natural Sciences, No.3(1). PP.82–87, (2013).

2. *Sikmon J.E., Morales M.R., Phippen W.B., Vieira R.F. and Hao Z.*, ASHS Press, Alexandria, VA. PP. 495–505, (1990).

3. *Mishra P. and Mishra S.* American Journal of Food Technology. PP.336–341, (2011).

4. *Runyoro D., Ngassapa O., Vagionas K., Aligiannis N., Graikou K. and Chinou I.*, Planta Medica, No.75. P.907 (2009).

5. *Yamasaki K., Nakano M., Kawahata T., Mori H., Otake T., Ueba N., Oishi I., Inami R., Yamane M., Nakamura M., Murata H. and Nakanishi T.* Biological & Pharmaceutical Bulletin, No. 21. P.829 (1998).
6. *Kusamran W.R., Ratanavila A. and Tepsuwan A.* Food and Chemical Toxicology, No.36, 475 (1998).
7. *Deshpande R.S., Tipnis H.P.* Intecticidal activity of Ocimum Basilicum L. Pesticides, No. 12, 21-28, (1997).
8. *Zarlaha A., Kourkoumelis N., Stanojkovic T.P., Kovala-Demertzi D.* Journal of Nanomaterials and Biostructures, Vol.9 (No.3). PP.907–917, (2014).
9. *Fale P.L.V., Madeira P.J.A., Florencio M.H., Ascensao L. and Serralheiro M.L.M.* Food & Function, No. 2. PP. 130 (2011).
10. *Cook N.C., Samman S., Nutr J.* Biochem, No.7. PP. 66–76, (1996).
11. *Jitka, P., Milan, K., Jaromír, S., Zden., Jaroslav V., Jitka, Phytother U.* Res., No. 17. PP.1082–1087, (2003).
12. *Liang Feng, Xiaobin Jia, Mao-Mao Zhu, Yan Chen, Feng Shi, Molecules*, No.15. PP.9145–9156, (2010).
13. *Kojima H., Ogura H.* Triterpenoids from Prunella vulgaris, Phytochemistry, Vol. 25, No. 3. PP. 729–733, (1986).
14. *Dmitruk SI, Dmitruk SE, Berezovskaya TP*, Khim Prir Soedin, Vol. 3. PP. 449–450, (1987).
15. *Meehye Kim*, Food and Nutrition Sciences, No.3. PP.1290–1295, (2012).
16. *Mohaddese Mahboubi, Atefeh Mahboubi, Nastaran*, Herba Polonica, Vol. 61, No. 1. PP. 32–38, (2015).
17. *Procházková D., Boušová I., Wilhelmová N.* Fitoterapia, No.82. PP. 513–523, (2011)
18. *Liu F, Ng TB*, Life Sciences, Vol. 66, No. 8. PP. 725–735, (2000).
19. *Vardapetyan H., Tiratsuyan S. and Hovhannisyan A.* Journal of Experimental Biology and Agricultural Sciences, PP.300–308, (2014).
20. *Vardapetyan H., Tiratsuyan S., Hovhannisyan A., Martirosyan A.* Biological Journal of Armenia, No.64. PP. 111–116, (2012).
21. *Ryu S.Y., Lee C.K., Lee C.O., Kim H.S., Zee O.P.* Arch Pharm Res; No. 15(3). PP. 242–245, (1992).

THE ANTIRADICAL PROPERTIES OF *PRUNELLA VULGARIS L.* AND *OCIMUM BASILICUM L.* LEAVES' ETHANOLIC EXTRACTS

Kazaryan Sh., Rshtuni L., Gevorkyan M., Ohanyan A., Vardapetyan H.R.

SUMMERY

The antiradical activity and total flavonoid's content of ethanolic extracts of *Prunellavulgaris* and *Ocimum basilicum* from Armenian highland have been researched. The content of quercetin, rutin and apigenin was analized by HPLC. It has been detected that the general content of flavonoids in *O. basilicum* extract (27,2 ± 0.11 mg/g) is twice higher than in *P.vulgaris* (13,13±0,012 mg/g). In this case the antiradical activity of *P. vulgaris* extract (IC_{50}=0,65±0,005 mg/g) 6 times higher than the antiradical activity of *O. basilicum* extract (IC_{50}=3.9±0.08 mg/g). HPLC has shown that rutin and quercetin are major flavonoids in *O. basilicum* extract and rutin, apigenin are major flavonoids in *P. vulgaris.*

Keywords: *Prunella vulgaris, Ocimum basilicum, flavonoids, antiradical activity, HPLC.*

PRUNELLA VULGARIS L.-Ի ԵՎ *OCIMUM BASILICUM L.*-Ի ՏԵՐԵՎՆԵՐԻ ՍՊԻՐՏԱՅԻՆ ՄԶՎԱԾՔՆԵՐԻ ՀԱԿԱՌԱԴԻԿԱԼԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ղազարյան Շ.Ա., Ռշտունի Լ.Ռ., Գևորգյան Մ.Լ., Օհանյան Ա.Ժ., Վարդապետյան Հ.Ռ.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հետազոտվել են Հայկական լեռնաշխարհի տարածքում աճող խուլեղինջազգիների ընտանիքի երկու ներկայացուցիչների՝ սևագլխիկ սովորականի (*Prunella vulgaris*) և ռեհան անուշաբույրի (*Ocimum basilicum*) տերևների սպիրտային մզվածքներում ֆլավոնոիդների ընդհանուր պարունակությունը և հակառադիկալային ակտիվությունը։ Բարձր էֆեկտիվությամբ հեղուկ խրոմատոգրաֆիայի մեթոդով որոշվել է մզվածքների մեջ քվերցետինի, ռուտինի

և ապիգենինի պարունակությունը: Հայտնաբերվել է, որ *O.basilicum-ի* մզվածքում ֆլավոնոիդների ընդհանուր պարունակությունը (27,2 ± 0.11 մգ/գ) 2 անգամ բարձր է, քան *P.vulgaris-ի* մզվածքում (13,13±0,012 մգ/գ): Այս դեպքում *P.vulgaris-ի* մզվածքի հակառադիկալային ակտիվությունը (IC_{50}=0,65±0,005 մգ/գ) 6 անգամ բարձր է *O.basilicum-ի*մզվածքի հակառադիկալային ակտիվությունից (IC_{50}=3.9±0.08 մգ/գ): ԲԷՀԽ անալիզը ցույց է տվել, որ *O.basilicum-ի* մզվածքում հիմնական ֆլավոնոիդներն են ռուտինը և քվերցետինը, *P.vulgaris-ի* մզվածքում՝ ռուտինը և ապիգենինը:

Հիմնաբառեր: *Prunella vulgaris, Ocimum basilicum,* ֆլավոնոիդներ, հակառադիկալային ակտիվություն, ԲԷՀԽ:

УДК 502(479):06

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНАНТРОПИЗМА У НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ МЛЕКОПИТАЮЩИХ МЕТОДОМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФОТОЛОВУШЕК

Л.Г. Папян, А.М. Саргсян

Научный Центр Зоологии и Гидроэкологии НАН РА

lyov.papyan@gmail.com, hayk.s.mdd@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В данной научной статье рассматривается процесс формирования синантропизма у представителей разных отрядов млекопитающих во временном разрезе протекал с заметными отклонениями в связи с образом жизни некоторых видов млекопитающих разных регионов Армении, о чем свидетельствуют наши данные, связанные с наблюдением за некоторыми из мелких видов хищных животных.

Ключевые слова: синантропизм, фотоловушка, хищники.

Введение

Представители отряда грызунов всегда в той или иной степени являлись синантропами. Они давно приспособились к сожительству с человеком и в течение времени отлично адаптировались к новым условиям. Человеческие постройки, в особенности многоэтажные дома, в которых функционируют мусоропроводы, являются для солидного числа видов животных прекрасным и удобным местом для жилья, питания и размножения.

Использование фотоловушек становится все более популярным методом исследования суточной активности и поведенческой особен-

ности животных. Данный метод имеет очевидные преимущества. Установка фотоловушек непосредственно около входов нор и вблизи человеческих жилищ позволяет описывать поведенческие особенности животных-синантропов. Однако несмотря на кажущуюся простоту установки фотоловушек, надо учитывать ряд важных факторов, которые связанны с маленькими размерами и другими особенностями серых крыс, постоянным присутствием в данной местности людей и домашних животных.

Материалы и методы

В период июль–ноябрь 2015г. проводилось несколько экспедиций в различных районах РА (Гегаркуник, Котайк, Вайоц Дзор, Арарат).

При изучении экологии грызунов часто возникает необходимость определить присутствие или посещение того или иного места животным, эффективно провести регистрацию событий при любом уровне освещения (и в полной темноте). С этой целью мы устанавливали наши устройства в подвалах домов и в садах. Устройства работали круглосуточно. В условиях низкой освещенности наши устройства использовали фотовспышки, а сами фотоловушки были установлены либо на земле, либо на деревьях (на очень низкой высоте). Данный метод позволяет применять его для съемки самых мелких млекопитающих, а также птиц и беспозвоночных.

В силу своей компактности и доступности мы выбрали модель 940NM HD (Рис. 1). Устройство имеет возможность работать от 4-х батареек в течение 4–5 часов, а для более длительной работы требует полный комплект батареек АА из 8-и шт. Запись информации ведется на карту памяти формата SD емкостью 8/16/32 Гб класса не ниже 8, что позволяет писать порядка 10–12 часов видео в формате HD720. Устройство позволяет вести запись маленькими фрагментами до 1 минуты.

Ночная подсветка на модели 6 ИК-светодиодами. Включается автоматически датчиком освещённости. Очень удобна для наблюдений мелких млекопитающих, когда запись событий проводится на ограниченном участке площадью порядка 1 м2. Для работы во влажных условиях (осадки, роса) необходима установка камеры в боксы или иная защита.

Результаты и обсуждение

Очень интересные кадры получились на территории Араратского региона, а именно в погребах частных домов города Арташата были обнаружены серые крысы, которые оказались чрезвычайно хорошо приспособлены к сожительству с человеком. На кадрах, снятых видеорегистратором, видно следующее: когда мы ставим приманку, а именно кусок копченой рыбы, крыса подходит, забирает кусок и либо начинает есть его, либо забирает себе в нору, а при установлении отравленной приманки крыса даже близко не подходит и не желает есть отравленную рыбу. Это в очередной раз доказывает высокий уровень синантропности этих животных и прекрасно показывает насколько хорошо они приспособились к сожительству с человеком.

Заключение

Наш опыт доказывает, что мелкие млекопитающие все больше и больше адаптируются не только к самому человеку, но и к новым условиям, создаваемым все тем же человеком. Безусловно, эта их особенность помогает им выживать в нынешних условиях – в эру высоких технологий и новейших химических препаратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидорчук Н.В. и др.* Опыт использования фотоловушек при изучении поведенческой экологии барсука Meles meles // Териофауна России и сопредельных территорий: матер. VIII съезда Териологич. об-ва. М., 2007. С. 455.
2. *Эрнандес-Бланко и др.* Опыт применения цифровых фотоловушек для идентификации Амурских тигров, оценки их активности и использования основных маршрутов перемещений животными // В кн.: «Амурский тигр в Северо-Восточной Азии: проблемы сохранения в XXI веке». Отв. Ред. Журавлев Ю.Н. Владивосток: Дальнаука. 2010. СС. 100–103.
3. *Сидорчук Н.В., Рожнов В.В.* Дистанционные методы изучения барсуков: некоторые особенности использования фотоловушек//Дистанционные методы изучения в зоологии: матер. научн. конф. М.: Товарищество научных изданий КМК. 2011. С. 87.

4. *Папян Л.Г., Гамбарян Г.Г.* Исследование поведения и активности мелких млекопитающих методом использования фотоловушек. Ломоносов-2015.

RESEARCH OF SYNANTHROPISM OF SOME SMALL MAMMAL SPECIES BY USING OF TRAIL CAMERAS

L. Papyan, H. Sargsyan

ABSTRACT

Using of trail cameras and DVRs (Digital Video Recorder) in our researches allows us to observe the behavior and activity of animals remotely. Weather and time do not have a significant role, because new models allow us to shoot at all conditions. In this work we present the functioning of our digital recorders on the example of the brown rat (Rattus norvegicus).

Keywords: brown rat (Rattus norvegicus), trail camera, synanthropism.

ԿԱԹՆԱՍՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՏԵՍԱԿՆԵՐԻ ՄՈՏ ՍԻՆԱՆԹՐՈՊԻԶՄԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒՍԱՆԿԱՐՉԱԿԱՆ ԹԱԿԱՐԴՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Լ.Հ. Պապյան, Հ.Մ. Սարգսյան

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Տեսանկարահանող սարքերի և, այսպես կոչված, <<ֆոտոթակարդների>> օգտագործումը մեր հետազոտություններում, թույլ է տալիս հեռակա հետևել կենդանիների վարքին և ակտիվությանը: Ընդ որում, ժամը և եղանակային պայմանները որոշիչ դեր չեն խաղում, քանի որ նոր մոդելները հնարավորություն են տալիս մեզ աշխատել բոլոր պայմաններում: Սույն հոդվածում ներկայացված է մեր թվային սարոերի աշձատանքը՝ մոխրագույն առնետի օրինակով (Rattus norvegicus):

Հիմնաբառեր՝ մոխրագույն առնետ (Rattus norvegicus), ֆոտոթակարդ, սինանթրոպիզմ:

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Арутюнян Т.Н. –	д.ф-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений ЕГУ
Амбарцумян Э.Н. –	к.х.н., ведущий научный сотрудник лаборатории защиты растений и синтеза пестицидов АНАУ
Аракелян М.К. –	магистрант первого года обучения по направлению «Прикладная математика и информатика»
Ахоян Л.А. –	аспирант кафедры технологий материалов и структур электронной техники
Вардапетян Г.Р. –	д.б.н., профессор, зав.кафедрой медицинской биохимии и биотехнологии РАУ
Ворсканян А.С. –	к.х.н., старший научный сотрудник лаборатории защиты растений и синтеза пестицидов АНАУ
Гараков В.Г. –	к.ф-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА
Геворкян М.Л. –	к.б.н. (ЕГУ)
Григорян А.А. –	аспирантка кафедры общей и фармацевтической химии РАУ
Енгоян А.П. –	д.х.н., профессор, профессор кафедры общей и фармацевтической химии РАУ
Казарян Ш.А. –	аспирантка кафедры медицинской биохимии и биотехнологии РАУ
Маргарян В.Н. –	д.ф-м.н., профессор, профессор кафедры математики и математического моделирования РАУ
Мелкумян Г.С. –	магистрант первого года обучения по направлению «Прикладная математика и информатика»
Оганян А.Ж. –	лаборант кафедры медицинской биохимии и биотехнологии РАУ
Папян Л.Г. –	аспирант Института зоологии НАН РА
Петросян Г.А. –	магистрантка первого года обучения по направлению «Прикладная математика и информатика» РАУ
Рштуни Л.Р. –	лаборант лаборатории биохимии РАУ
Саргсян А.М. –	аспирант Института зоологии НАН РА
Хачатрян В.А. –	аспирантка кафедры технологий материалов и структур электронной техники РАУ
Хоршикян А.Г. –	соискатель кафедры математики и математического моделирования РАУ

СОДЕРЖАНИЕ

Главный редактор *– М.Э. Авакян*
Редактор *– Э.А Рухкян*
Корректор *– М.Э. Тадевосян*
Комьютерная верстка *– А.Г. Антонян*

Адрес Редакции научных изданий
Российско-Армянского
университета:

0051, г. Ереван, ул. Овсепа Эмина, 123
тел./факс: (+374 10) 27-70-52 (внутр. 42-02)
e-mail: redaction.rau@gmail.ru

Заказ № 30
Подписано к печати 22.12.2016г.
Формат 60x70 1/16. Бумага офсетная № 1.
Объем 6.5 усл. п.л. Тираж 200 экз.